

Снежана Савић – докторанд на Учитељском факултету у Београду
ОШ „Црњански“ Јагодина

Стручни рад
Методичка теорија и пракса, број 2/2021
УДК: 371.3:51]:004.925.8
стр. 143–151

ВИЗУЕЛИЗАЦИЈА ПУТЕМ ИНФОРМАЦИОНИХ ТЕХНОЛОГИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Резиме: У раду се бавимо принципом визуелизације кроз примену информационих технологија у настави математике. Циљ је приказивање значаја примене информационих технологија с намером остваривања принципа визуелизације. Прво, одређено је епистемолошко значење принципа визуелизације. Друго, анализирана је оствареност принципа визуелизације у настави математике. Треће, приказана су и размотрена релевантна истраживања која повезују примену информационих технологија у настави математике са принципом визуелизације. На основу досадашњих теоријских и емпиријских сазнања закључено је да се применом информационих технологија у настави математике остварују ефективна знања код ученика, те да се у оквиру истих путем визуелизације код ученика могу стимулирати аритметичка, алгебарска и геометријска интуиција.

Кључне речи: визуелизација, менталне слике, информационе технологије, настава математике.

УВОД

У почетној настави математике често се јавља потреба да се математички објекти прикажу ученицима визуелно ради лакшег поимања истих. Класична настава изискује много дидактичких и наставних материјала, док информационе технологије (ИКТ) као један сегмент модерне наставе пружају доста могућности путем којих се за један наставни час може урадити више примера, а ученици се током рада могу више пута вратити на исти садржај, што у великој мери

може допринети лакшем и бржем савладавању градива. У настави математике можемо разликовати два типа визуелизације: симболичка и предметна. У том смислу информационе технологије се могу употребити за израду дводимензионалних облика и тродимензионалних симулација. Симболичка визуелизација се постиже сликама, цртежима, графицима, схемама, док се предметна визуелизација постиже моделима геометријских тела. Применом информационих технологија садржај наставног часа је богатији, а ученици су мотивиснији, што је од кључног значаја за стицање ефектних знања.

Многе апстрактне математичке структуре ученицима ће бити конкретније и лакше за разумевање уколико се испоштује принцип визуелизације посредством информационих технологија. Кроз даљи рок рада упознаћемо се са појмом и основним одликама визуелизације и предствићемо релевантна истраживања о значају примене информационих технологија у наставном процесу и утицај истих на оствареност принципа визуелизације.

О ПОЈМУ И ОСНОВНИМ ОДЛИКАМА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Визуелизација представља способност појединца да просторно, а не само вербално, представља и анализира односе међу информацијама и да ментално манипулише њима (Nagy-Kondor, 2014). Способност просторне визуелизације омогућава да се предвиди изглед сложених предмета, па све до манипулације дводимензионалних и тродимензионалних предмета када су визуелно перципирана (Barisnikov & Pizzo, 2013).

Дуруасин и Демеус (Duroisin & Demeuse, 2016) сматрају да је вештина просторне визуелизације резултат учења. Аутори анализирају неке од школских програма у Француској у којима се говори о томе да се на вештини просторне визуелизације ради и да се она може развијати. За ученике од 13 до 14 година, не поставља се питање просторне визуелизације, већ се учење врши кроз трансформацију равни уз помоћ прозирних фолија и све радње се одвијају директним посматрањем и непосредном манипулацијом. На основу изведеног истраживања дошли су до закључка да на развијању просторне визуелизације треба радити од самог почетка образовања. Ученици старијих узраста спонтано мобилишу своје знање при решавању проблема. То знање се често стиче пре поласка у школу (Giordan & DeVecchi, 1994). Тако стечена вештина се одупире променама, јер су стечена на личном искуству (Treagust & Duit, 2008). Пијаже и Инхелдер (Piaget & Inhelder, 1972) сматрају да је узраст деце од 8 година најпогоднији за разумевање и извођење операција са репрезентацијама.

Савремена настава математике се темељи на наставним (дидактичким) принципима који су међусобно повезани. Принцип очигледности заузима посебно место у почетној настави математике, јер се у том периоду формирају почетни математички појмови. У почетној настави мишљење ученика се још налази на конкретном нивоу, што доводи до тога да је при усвајању математичких појмова најпре потребно да дете оперише представама, а затим и апстракцијама. Принцип очигледности је више од стицања знања помоћу перцепција, то је и примена раније стечених представа (Дејић и Егерић, 2006). Значај визуелне обраде и интересовање за уло-

гу визуелне представе у настави математике све више расте осамдесетих година прошлог века. Пресмиц (Presmag, 2006) наводи да се у том периоду јављају квалитетна истраживања која су била погодно средство за истраживање мисаоних процеса повезаних са употребом менталних слика у учењу математичких садржаја. Пресмиц (Presmag, 1986) сматра да су сликовите представе ментална схема за репрезентације информација на објекат који није тренутно присутан. Полазећи од идеја које се односе на менталне представе и семантичке мреже Хит (Hitt, 2004) је имао за циљ да покаже функционални карактер ових приказа, посебно се фокусирајући на семиотичке представе током хеуристички вођеног процеса решавања проблема.

Анализирање различитих приступа овом проблему довело је до увиђања важности између репрезентације за формирање математичких појмова и важности формирања менталних представа помоћу хеуристичког приступа. Циљ истраживања које је Бишоп (Bishop, 2008) извео са својим студентима узраста од 16 до 26 година био је идентификовати релативне предности и слабости у просторном пољу и покушати их повезати са различитим језичким, еколошким и културним карактеристикама према пореклу ученика. Током цртања студенти користе равне и закривљене линије, тачке, затворене и отворене облике, геометријске и неправилне облике. При анализи уочене су две врсте потешкоћа. Прво, очигледан недостатак стручности за цртање. Друга потешкоћа са овим задацима била је критеријум који је требало задовољити. Ови задаци, дакле, указују на неке вештине цртања и на критеријуме који нису задовољени, посебно на препознавање сврхе која треба бити испуњена цртежом, по којем се оцењује тачност. Визуелизација има дугу традицију у математичком образовању која се заснива на теоријским и практичним поставкама. Визуелизација је способност, процес и производ стварања, тумачења, употребе и рефлексije слика, дијаграма у нашим мислима, на папиру или помоћу технологије, у сврху приказивања и преношења информација, размишљања и развоја раније непознатих идеја и унапређивања разумевања (Hershkowitzetal, 1989).

Пресмиц (Presmag, 2002) бави се утицајем визуелизације код ученика при решавању математичких проблема. Испитивала је улогу визуелизације у четири најважније етапе решавања проблема које су назване: припрема, решавање, закључивање и провера. Врста сликовне представе и њена улога у овим етапама омогућава да слика има смисла. Визуелне представе које ученици користе су често личне природе. Не само да су повезане са концептуалним знањем, већ су често повезане са тренутном инспирацијом за решавање. Управо ти лични аспекти могу омогућити или ограничити процес решавања математичког проблема. Аутор је изнео закључак да ученици, уколико наиђу на потешкоће при решавању математичког проблема, често ће прибећи визуелизацији тог проблема, најчешће кроз дијаграм. Дувал (Duval, 2002) полази од става да су визуелизација и репрезентација с рж разумевања математике, те се бави истраживањем и анализом њихове улоге у математичком образовању. Објашњава да је Пијаже 1961. године изнео став да не постоји ништа теже за једног психолога од разумевања интуиције математичара.

Визуелизација, као једини когнитивни модалитет у математици, не може се користити као непосредна и очигледна подршка за учење. Употреба система семиотичких представљања је од суштинске важности за математичко размишљање, јер у математици, за разлику од ос-

талих наука, не постоје други начини приступа математичким објектима осим производа неке семиотичке преставе. У осталим наукама слике и описи појава из спољног света се не могу упоредити са онима у математици. Једно истраживање које се састојало од 16 вежби просторне визуелизације резултирало је закључцима да су предложене вежбе представљале проблем ученицима, без обзира на њихов узраст. Дакле када су били у питању осмогодишњаци пет од десет ученика тог узраста није успело да изведе вежбе, док се сличан проблем јавио и код ученика од четрнаест година. С тога дошло се до закључка да недостаци стицања и развијања способности просторне оријентације остају значајни током већег дела обавезног школовања (Duroisin & Demeuse, 2016).

РЕЛЕВАНТНА ИСТРАЖИВАЊА О ЗНАЧАЈУ ПРИМЕНЕ ИНФОРМАЦИОНИХ ТЕХНОЛОГИЈА (ИКТ) И КОРЕЛАЦИЈА СА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈОМ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Када је реч о значају примене информационих технологија у настави математике поставља се питање у којој мери се употреба репрезентација, представљена путем технологије помаже ученицима у разумевању математичких појмова и решавању задатака? Такође, да ли се може идентификовати аспект математичког учења који можемо побољшати употребом технологије? Овим питањима се бави Сантос (Santos, 2001) у свом раду који се односи на ученички приступ примене технологије при решавању математичких проблема. Закључио је да рад при динамичном окружењу помаже ученицима да истражују и испитују одређене претпоставке. Он објашњава да: (1) технологија омогућава употребу математичких конструкција што ученицима обезбеђује да боље разумеју одређене геометријске појмове; (2) применом технологије може се приступити основним математичким ресурсима и могу се лакше решавати нерутински проблеми; (3) технологија омогућава ученицима да решавају задатке давањем више решења, дискутовањем и долажењем до правог одговора;

(4) важан циљ који се остварује применом технологије је тај што ученици развијају различите стратегије за проналажење и анализирање математичких односа који настају разматрањем одређених случајева.

Једно од значајнијих достигнућа у савременој информациониј технологији је употреба мултимедијале презентације. Надрљански и Влаховић (2000) истичу да мултимедија у настави омогућава: индивидуализацију учења и напредовање ученика, пријем информација – аудитивно и визуелно, неограничено понављање датих садржаја, организацију кооперативног учења, управљање процесом учења, правремене повратне информације, лакши приступ информацијама и побољшавање квалитета знања. Примена и значај технологије зависи и од самих предавача. Како се наставни процес стално развија и мења, наставници морају да прате савремене токове наставе и да развијају своја знања и на пољу технологије како би били у могућности да је примене у настави (Niess, 2005).

Традиционална настава математике је била ограничена на памћење и репродукцију, док савремена настава се залаже за нагађање, уопштавање. Технологија може учинити да ученици постану активнији учесници у наставном процесу кроз експериментисање, истраживање и решавање проблема које подстиче постављање питања уместо да само траже одговоре (Makar & Confrey, 2006). Технологија може унапредити и променити наставу математике. Педагошке могућности технологије имају трокомпонентну структуру. Прво, задаци који се постављају ученицима – помоћу технологије се побољшава брзина, тачност. Друго, подстакнута је интеракција у учионици – коришћење технологије за побољшање процеса доласка до решења и подржавање заједничког рада ученика. Треће, коришћење технологије пружа подршку новим циљевима наставе математике.

Рајмер и Мајер (Reimer & Moyer, 2005) су се бавили испитивањем употребе рачунара у настави математике приликом обраде садржаја о разломцима. Ученици су током три недеље учења користили рачунар као првобитно средство за учење и сва манипулативна средства су пребачена у виртуелни свет. Резултати тестирања које је реализовано након изведене наставе довеле су закључка да је примена рачунара при обради садржаја о разломцима довела до побољшава знања ученика.

На основу извршеног интервјуа са ученицима закључили су да је примена рачунара омогућила ученицима пружање непосредних информација и брзе повратне информације; лакше и брже се користи рачунар од папира и оловке; ученици су са уживањем усвајали садржаје о разломцима. Истражујући утицај различитих услова на успешност усвајања садржаја о разломцима, истраживачи Рајндхол и сарадници (Reinhold et al., 2020) су пратили ученике са бољим и слабијим постигнућима. На основу изведеног истраживања дошли су до закључка да је укључивање технологије и доступности у учење садржаја о разломцима допринело олакшаном са владавању садржаја. Док су ученици са слабијим постигнућима имали велику корист и да је доступност у учењу била кључна за учење. То сугерише да интерактивни материјали и прилагодљив поступак обраде може подржати ученике у учењу математичких појмова, посебно за слабије ученике. У свом раду Фераре и сарадници (Ferrara et al., 2009) су резимирали истраживања на пољу алгебре са освртом на примену технологије у последњих тридесет година. Они истичу двоструку улогу технологије у настави математике: (1) технологија се може користити за лакше израчунавање при решавању математичких проблема и (2) у сложенијим проблемима технологија може служити за истраживање, нагађања, потврђивање тврдње. Исти аутори истичу да је у настави математике отпочела велика револуција увођењем технологије у њу. Динамичан начин рада применом технологије омогућава ученицима да при решавању алгебарских проблема истраже многе ситуације и приметите шта се мења променом одређених фактора. Нортон и сарадници (Norton et al., 2000) истичу да се велика новчана средства издвајају за технологију за школе, а да је приступ схватању значаја технологије у настави и даље означен као главна препрека. За њих је основна препрека примене технологије, заправо недостатак њене интеграције у наставни процес.

Џонс (Jones, 2002) објашњава да се развијање технологија у настави креће ка преиспитивању вредности учења математике помоћи ИКТ-а и да је пожељно усредсредити се на геометрију – посебно јер је геометрија кључна компонента математике и суштински је везана за визуелизацију. Лаборд и сар. (Laborde et al., 2009) су се бавили употребом технологије у настави геометрије коришћење дијаграма у решавању проблема. Као значајан проблем наводе немогућност ученика да уоче разлику између дизајна самог веб алата и понашања које је директан резултат математике.

Решење овог проблема виде у начину решавања и пажљивом избору проблема од стране учитеља. Хоилес (Hoyles, 1995) је своја размишљања усмерио на интеракцију ученика са рачунарским окружењем. Развијајући концепт „ситуационих апстракција“ ученицима се пружа могућност да истражују приступ математичким садржајима важним за разумевање геометрије и у таквим процесима софтверски алат постаје продужетак сопственог размишљања ученика. Арвантики и Заранис (Arvanitiki & Zaranis, 2020), истражујући предност савремене наставе дошли су до закључка да је подучавање и учење путем ИКТ-а интерактивни процес за ученике и има позитиван ефекат на учење геометрије у поређењу са традиционалном наставном методом. Посебну пажњу истраживача заокупља питање употребе технологије при учењу геометријских тела – 3Д модела (Jones, Mackrell & Stevenson, 2009). Главно питање јесте утицај обраде 3Д геометријских модела на 2Д екрану рачунара. Решавање овог проблема води до програмера и њихове могућности да ове моделе преточе на екран. Истичу да постоји могућност да овако обрађени садржаји могу ученике да наведу да их доживе као покретне игре, сличне данашњим видео игрицама. Остаје отворено питање како да се учење геометрије олакша кроз различите дигиталне технологије на начин који успешно надовезује на визуелну интуицију. „Циљ је користити технологију у настави која треба да обезбеди окружење за активно истраживање математичких структура кроз вишеструке репрезентације, односно да ученицима омогући неке математичке аспекте који нису доступни коришћењем само папира и оловке. Ученици се могу концентрисати на идеје; додатно, компјутери могу стимулисати код ученика развој геометријске интуиције, кроз интересантне визуелизације у 2Д или 3Д простору“ (Диковић, 2007 према: Парезановић и сар., 2010: 35).

ЗАКЉУЧАК

Примена информационих технологија у наставном процесу омогућава и подстиче ученике да предвиђају резултате и да визуелизују математичке садржаје док генеришу своје менталне слике. Коришћење рачунара помаже ученицима да уочавају које се промене дешавају услед промене неког од услова задатка и олакшавају тестирање нагађањем.

Технологија се може најефикасније користити за помоћ ученицима у прикупљању података, тестирању, модификовању и одбацивању или прихватању нагађања док размишљају о овим математичким концептима и доживљавају математичка истраживања. Како виртуелни тако и физички манипулативни материјали показали су се као ефикасни алати за учење када

се користе са различитим групама ученика у различитим контекстима за учење математичких садржаја. Коришћење вишеструких представљања и флексибилност при превођењу међу тим репрезентативним облицима олакшава ученицима учење и има потенцијал да продуби њихово разумевање. Упоредо са развојем технологије морају се оснаживати и надограђивати знања наставника у вези са истом, како би примена била адекватна и функционална. Коришћењем ИКТ-а у наставном процесу ученицима се обезбеђује боље разумевање и овладавање математичким садржајима. Наиме, кроз примену информационих технологија прожима се и визуелизација чији је потенцијал да одређене апстрактне структуре ученицима учини лакшим за разумевање. Многи математички појмови могу се лакше разумети посредством слика у 2Д или 3Д облику, што ученика додатно стимулише на усвајање нових знања.

Литература

1. Arvanitaki, M, Zaranis, N. (2020). The use of ICT in teaching in primary school. *Education and Information Technologies*, 25, 5003-2016.
2. Barisnikov, K., Pizzo, R. (2013). *L'examen des compétences visuo-spatiales*. In Nel, M.-P., Bil (Eds.), *Neuropsychologique de l'enfant* (chapitre 6). Bruxelles :Mardaga.
3. Bishop, A. J. (2008). *Visualising and mathematics in a pre-technological culture*. In P. Clarkson, & N. Presmeg (Eds.), *Critical Issues in Mathematics Education. Major Contributions of Alan Bishop*, 109 - 119.
4. Giordan, A., De Vecchi, G. (1994). *Les origines du savoir : Des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques*. Paris :Delachaux et Niestlé.
5. Дејућ, М. и Ђећућ, М. (2006). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.
6. Duroisin, N., & Demeuse, M. (2016). *Le développement de la habileté de visualisation spatiale en mathématiques chez les élèves âgés de 8 à 14 ans*.
7. Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Representations and Mathematics Visualization, *Psychology of Mathematics Education*, 311-335.
8. Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In: Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*, 121-139.
9. Jones, K., Mackrell, K. & Stevenson, I. (2009). Designing digital technologies and learning activities for different geometries. In Celia Hoyles and Jean-Baptiste (eds), *Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain* (ICMI Study 17), Chapter 4, 47-60.
10. Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2009). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, past, present and future*, 275-303.
11. Makar, K., & Confrey, J. (2006). Dynamic statistical software: How are learners using it to conduct database investigations? In C. Hoyles, J. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the*

- 17th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.
12. Nadrljanski, Đ., B. Vlahović (2000). Informatika i obrazovanje. *Pedagogija*, 3-4.
 13. Nagy-Kondor, R. (2014). Importance of Spatial Visualization Skills in Hungary and Turkey: Comparative Studies. *Annales Mathématiques et Informatiques*, 43, 171–181.
 14. Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge, *Teaching and Teacher Education*, 21, 509-523.
 15. Norton, S. J., McRobbie, C., Cooper, T. (2000). Exploring secondary mathematics teachers' reasons for not using computers in their teaching: Five case studies. *Journal odresearch on computing in education*, 33 (1).
 16. Парезановић, Д., Диковић, Љ., Пикула, М. и Шпијунувић, К. (2010). Електронско образовање у методици математике. *INFO M*, 36, стр.32-36.
 17. Piaget, J. & Inhelder, B. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: PUF.
 18. Presmeg, N. (2002). Graduate students' visualization in two rate of change problems. *Representations and Mathematics Visualization, Psychology of Mathematics Education*, 47-62.
 19. Presmeg, N. (2006). Research on visualizaton in learning and teaching mathematics. *Handbook of Researsh on the Psychology of Mathematics Education*, 205-235.
 20. Reimer, K. & Moyer, P. (2005). Third-graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24, 1.
 21. Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., & Reiss, K. (2020). Learning fractions with and without educational technology: what matters for high-achieving and low-achieving students? *Learn. Instr.* 65:101264. doi: 10.1016/j.learninstruc.2019.101264
 22. Santos, M. (2001). Students approaches to the use of technology in mathematical problem solving. *Psychology of Mathematics Education*, PME-NA XXIII: Proceedings od the Twenty-Third Annual Meeting.
 23. Treagust, D., Duit, R. (2008). Conceptual Change. *Cultural Studies of Science Education*, 3 (2), 297-328
 24. Ferrara, F., Pratt, D., Robutti, O. (2009). The role and uses of thenologies for the teaching of algebra and calculus. *Hanbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, past, present and future*, 238-273.
 25. Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. & Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition. (ICMI Study Series)*, 70-95
 26. Hitt, F. (2004). Les représentationssémiotiquesdansl'apprentissage de concepts mathématique-setleur rôle dansunedémarcheheuristique. Le langage dansl'apprentisaage des mathematiques. *Revue des sciences de l'éducation*. 30, 2, 329-354.
 27. Hoyles, C. (1995). Exploratory software, exploratory cultures? In A. di Sessa, C. Hoyles, R. Noss, & L. Edwards (Eds.), *Computers and exploratory learning*, 199–219.

Snežana Savić - doctoral student at the Teacher Education Faculty in Belgrade
PS “Crnjanski” Jagodina

VISUALIZATION THROUGH INFORMATION TECHNOLOGIES
IN TEACH MATHEMATICS

Summary: In this paper we deal with the principle of visualization through the application of information technology in mathematics teaching. The aim is to show the importance of the application of information technology with the intention of achieving the principle of visualization. First, the epistemological significance of the visualization principle is determined. Second, the realization of the principle of visualization in mathematics teaching was analyzed. Third, relevant research that connects the application of information technology in mathematics teaching with the principle of visualization is presented and discussed. Based on previous theoretical and empirical knowledge, it was concluded that the application of information technology in the teaching of mathematics achieves effective knowledge in students, and that within the same through visualization in students can stimulate arithmetic, algebraic and geometric intuition.

Keywords: visualization, mental images, information technologies, mathematics teaching.