Оливера С. Живановић
ОШ „Боривоје Ж. Милојевић“

Прегледни рад
Методичка пракса број 2/2017.
УДК: 371::511.13-057.874
стр. 231-246.

# ПРОБЛЕМИ УЧЕНИКА У РАЗУМЕВАЊУ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА РАЗЛОМАКА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

**Резиме**: Рад је заснован на теоријској анализи истраживања у области разломака, са посебним освртом на проблеме ученика приликом разумевања репрезентација разломака у почетној настави математике. Циљ овог рада је расветљавање проблема на које ученици наилазе приликом разумевања репрезентација разломака. Представљена истраживања која су коришћена за потребе овог рада, била су путоказ ка препрекама са којима се ученици сусрећу приликом разумевања појма разломка, с намером њихових превазилажења. Рад се састоји од два дела. Први део је посвећен методичком приступу садржаја у вези са разломцима. Док је у другом, главном делу, пажња усмерена на приказ релевантних истраживања у вези са проблемима разумевања овог појма од стране ученика. На основу сагледаних теорија и модела, дошли смо до следећих закључака: прво, изградњи менталне слике разломка допринеће адекватна манипулација његовим репрезентативним моделима, најпре онима из свакодневног живота ученика; друго, повећање визуелизације садржаја у вези са разломцима, оствариће се коришћењем бројевне полуправе и треће, при обради ове теме потребно је добро владати иновативним моделима наставе, јер коришћење широког спектра наставних система омогућава боље разумевање репрезентација разломака.

**Кључне речи:** репрезентације разломака, проблем, почетна настава математике, методички приступ.

# УВОД

Кроз уводни део овог рада упознаћемо се са Наставним програмом који се користи у Србији, а тиче се учења садржаја у вези са разломцима, као и са прописаним стандардима постигнућа у домену разломака. Даље, осврнућемо се на методичке приступе садржајима у оквиру разумевања репрезентација разломака, те ћемо се упознати са бројним истраживањима у вези са усвајањем појма разломка, која ће нам дати битне информације у вези са проблемима ученика приликом схватања овог појма. У оквиру обраде аритметичких садржаја у другом, трећем и четвртом разреду основне школе, изучавају се и садржаји о разломцима. У складу са циљевима и задацима наставе математике, у почетној настави математике ученици треба да упознају разломак као део целине, да науче да разломке записују и упоређују, да одређују део ако је дата целина, као и да одређују целину ако је познат њен део (Дејић и Егерић, 2010).

У Наставном програму који се односи на Србију, истичемо да се у оквиру обраде аритметичких садржаја у другом, трећем и четвртом разреду изучавају садржаји у вези са разломцима. Ученици се у другом разреду упознају са поступком деобе једне целине на једнаке делове, а половљење целине претходи увођењу операције дељења. Приликом изграђивања појма правог разломка ученици се прво упознају са појмом половине, четвртине и десетине, а процес сазнања о појму разломка заснива се на практичној активности (деоба осносиметричних геометријских фигура). Даље упознавање са трећином, петином, шестином, седмином, осмином и деветином следи у трећем разреду, где се уопштава појам јединичног разломка представљеног као $\frac{1}{n}$. Док се у четвртом разреду обрађују разломци облика $\frac{a}{b}$ ($a<b$ и $a, b \in N$).

Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања за предмет Математика садрже стандарде постигнућа за области: Природни бројеви и операције са њима, Геометрија, Разломци и Мерење и мере.

Прописаним стандардима постигнућа у оквиру разломака, описани су захтеви на три нивоа: основном, средњем и напредном. На основном нивоу, ученици треба да: умеју да прочитају и формално запишу разломак $\frac{1}{n}$ ($n \leq 10$), препознају његов графички приказ и да израчунају половину, четвртину и десетину неке целине. Средњи ниво постигнућа подразумева да ученици умеју да препознају разломак $\frac{a}{b}$ ($b \leq 10$, $a < b$) када је графички представљен на фигури подељеној на b делова, да израчунају n-ти део неке целине и обрнуто, и да упоређују разломке облика $\frac{1}{n}$ (n ≤ 10). На највишем, напредном нивоу ученици треба да умеју да прочитају, формално запишу и графички прикажу разломак $\frac{a}{b}$ (b ≤ 10, a <b), знају да израчунају део $\frac{a}{b}$ (b ≤ 10, a <b) неке целине и да користе то у задацима (Стандарди постигнућа, 1. циклус ).

## *Кратак осврт на методички приступ садржајима у вези са разломцима*

У потрази за адекватним методичким приступом садржаја о разломцима у млађим разредима основне школе, посебно треба имати у виду општеприхваћени став да се знање гради на претходном знању (Berlin & White, 1995). За некога ко успешно трансформише одређени садржај у форму која је разумљива ономе ко учи, можемо рећи да поседује методичко знање (Livingston & Borko, 1990). Дакле, за успешно учење садржаја у вези са разломцима, важно је изабрати садржаје који ће ученике довести до нивоа са ког могу успешно наставити усвајање математичких садржаја, према програмски предвиђеним циљевима (Мићић, 2010). У вези са тим битно је указати на предзнање које је ученицима потребно како би успешно савладали појам разломка у млађим разредима основне школе. Деца се у почетном математичком образовању налазе на нивоу конкретног мишљења, стога је разумевање појма разломка неопходно подржавати разноврсним визуелним репрезентацијама, јер се тиме активира наставни процес учења, а апстрактни садржај чини разумљивијим, што утиче на изградњу функционалног знања. Полазну основу у почетној нстави математике чине реалне ситуације које представљају стимуланс за ученике да визуелизацијом развијају моделе којим се идентификују релевантни садржаји.

Аркави и Сфард (Arcavi & Sfard, 2003) посебну пажњу придају значају визуелних репрезентација. Аркави говори о три аспекта визуелних репрезентација: (1) као начин илустрације симболичког записа, (2) начин да се превазиђе јаз између интуитивног и симболичког записа решења и (3) начин да се дође до појмовног разумевања. У вези са претходно наведеним, можемо закључити да су визуелне репрезентације јако важне приликом формирања основних математичких појмова, у нашем случају при формирању и овладавању појмом разломка.

У даљем тескту представићемо методичке приступе који су значајни при формирању појма разломка и заснивају се на: манипулацији различитим предметима из непосредног окружења ученика; деоби, резању и савијању равних осносиметричних геометријских фигура и коришћењу полуправе приликом представљања разломака.

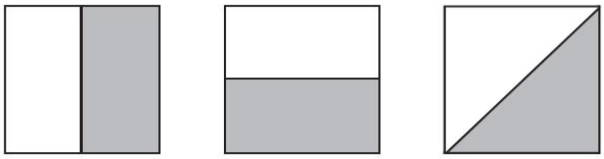
Деца се још у раном детињству упознају са разломком кроз несвесно усвајање радњи које проистичу из реалних ситуација у породици, приликом деобе одређених предмета. Стога децу треба упућивати да сагледају реалне, конкретне објекте као целине, а потом и делове целине који ће настати деобом целине на два једнака дела, као и визуелним представљањем тих делова (Лазић, 2014).

Фројдентал (Freudenthal, 1983) говори о четири аспекта разломка: разломак као ломљење, целина подељена на делове, разломак као упоређивање и разломак као једна операција. Учење садржаја о разломцима биће доста разумљивије конструкцијом одговарајућих модела који представљају разломке, чиме ће се омогућити представљање апстрактних форми са конкретним представама. Модели који се користе при упознавању разломака треба да одсликавају идеју целине као јединице и дела целине који се добија дељењем целине на једнаке делове, а затим и издвајање одређеног броја делова (Милинковић, 2013). Аналитичке (симболичке) представе су често присутне као методички најнапредније форме у раду наставника приликом формирања одређених математичких појмова, зато наставници не умеју да продукују добре сликовне представе проблемских ситуација које укључују разломке (Ball, 1990). Појам разломка ученици ће најбоље усвојити деобом њима свакодневно доступних предмета и прехрамбених производа које користе.

Према Кариламбису и Пита-Пантази (Charalambos & Pitta-Pantazi, 2005) “репрезентације играју важну улогу у учењу разломака код ученика, и треба да буду третиране као суштински елементи у подршци разумевања математичког концепта разломка“ (NCTM, 2000: 67). Пошто су савремени токови у настави математике усмерени на учење решавањем математичких проблема преко модела из реалног живота, неопходно је нагласити да математичко моделовање игра важну улогу у настави математике приликом формирања појма разломка у млађим разредима основне школе. Милинковић (2016) истиче да “модел служи као алатка за посредовање између стварног света и апстрактног математичког света“ (стр.65).

Методички приступ увођења појма разломка деобом предмета и коришћењем разних модела из неопсредног окружења ученика, неоспорно је најлакши начин, помоћу кога ће ученици схватити појам разломка. Међутим, ови модели нам не могу бити корисни, нпр. код мера и мерења, где битну улогу игра бројевна полуправа, о којој ће касније бити речи.

Пост, Крамер (Post & Cramer, 1989) и Дувал (Duval, 1999) сматрају да се ученици са апстрактним појмом разломка упознају путем деобе осносиметричних равних фигура: круга, квадрата, правоугаоника или једнакостраничног троугла. Пошто се процес сазнања о појму разломка заснива на манипулацији разноврсним дидактичким материјалом, пресавијање или резање папира облика одређене геометријске фигуре може бити од велике помоћи ученицима. Рецимо, ученици ће самостално поделити једну целину и одредити делове те целине, првенствено једне половине, чиме стичу правилну представу једне половине као дела целине. У вези са тим, деци је потребно показати да се поступак деобе-резања осносиметричних геометријских фигура, може обавити на више начина. На пример, квадрат се може делити хоризонтално, вертикално или по дијагонали (Слика 1) (Лазић, 2014).



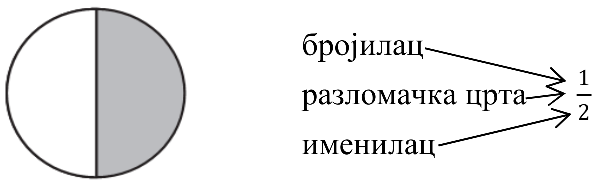
Слика 1. Половиљење квадрата на различите начине

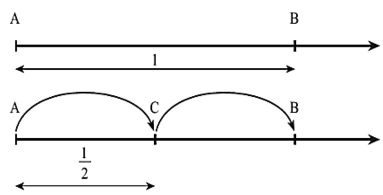
Поимање дељења једне целине, чије делове означавамо разломцима, наводи нас на то да се та целина може појавити у више идентичних примерака, дељењем на различите начине, што доприноси бржем формирању апстрактног појма разломка као броја (Мићић, 2004). Такође, ученици морају схватити да дељењем различитих фигура, половине две различите целине не морају бити једнаке у геометријском или физичком смислу.

Деоба, резање и пресавијање модела различитих равних геометријских фугура је функционално у погледу усвајања појма разломка, али за нијансу, можемо рећи, тежи начин од претходног методичког приступа, који је заснован на манипулацији предметима из реалног окружења ученика. Деоба круга нарочито је погодна при мерењу времена, нпр. при објашњењу да је једна половина часа заправо тридесет минута, тачније пола сата.

Вотанабеј (Watanabe, 2006), сматра да се у почетној настави математике за учење разломака, осим деобе и резања, користе и друге манипулативне активности као што су: лепљење, слагање – пузле, бојење и разне активности мерења (дужина, време, маса, преливање, пресипање, вагање, поплочавање и сл.). Крамер и Хенри (Cramer & Henry, 2002) сматрају да је представљање разломка кругом најфункционалнији модел за изградњу менталне слике разломка. На основу примера представљених кружним исечцима ученици ће брзо схватити, на пример, да је једна половина део целине подељене на два једнака дела (Слика 2а). Након манипулативних активности, полако се крећемо ка мисаоној обради сликовних представа – именовање и увођење симболичког записа. Реторичко објашњење појма разломка, обавезно мора бити корак испред симболичког записа. Дељење, односно разламање неке целине на одређени број једнаких делова, описујемо речима као разломак. Издвајање више једнаких делова целине, такође називамо разломком. Стога сваки разломак има свој назив, с обзиром на број једнаких делова на које смо поделили целину. Деобу целине на два једнака дела, описујемо речима као половине, на три једнака дела као трећине, на четири као четвртине, итд. Фознот и Долк (Fosnot & Dolk, 2002) наводе да разломци могу бити представљени дељењем целине на једнаке делове, или садржавањем једнаких делова у једном целом. Појмовима целина и разломак бавио се Тобијас (Tobias, 2013) у свом истраживању и он је посебан значај придао правилној употреби језика приликом дефинисања споменутих појмова.

У вези са наведеним Смол (Small, 2009) указује на то да сваки разломак има своју ознаку и записује се уз помоћ два броја $(a,b)$, један испод другог са цртом између њих. Дакле $\left(\frac{a}{b}\right)$, где се упознајемо са терминима именилац, бројилац и разломачка црта. Број испод разломачке црте назива се именилац разломка и показује на колико је једнаких делова подељена целина. Број изнад разломачке црте назива се бројилац и показује колико је од добијених једнаких делова издвојено. На основу наведеног објашњења на следећем примеру показаћемо визуелну презентацију разломка $\frac{1}{2}$ (Слика 2а).




Слика 2а. Модел разломка за $\frac{1}{2}$

Слика 2б. Модел разломка за $\frac{1}{2}$ (метод дужи)

Бавећи се моделима репрезентација у учењу разломака Бол (Ball,1993) посебан акценат ставља на представљање разломака на бројевној полуправи. Он истиче да је учење разломака уз помоћ бројевне полуправе или "методе дужи", најефикаснији начин разумевања разломака од стране ученика. Имајући то у виду, долазимо до закључка да деобом дате дужи као целине, на одређени број једнаких делова, потпомажемо изградњи визуелне представе одређеног разломка (Слика 2б). Руски математичар и методичар наставе математике Шевченко (Ševčenko, 1967) говори о два приступа приликом формирања појма разломака: мерење и дељење. Као ефикасно методичко средство при обради разломака истиче примену геометријских представљања, те наводи да је дуж најсавршенији модел за демонстрацију разломљених бројева. Предност коју има метод дужи у односу на друге репрезентативне моделе разломака, испољава се код мера и мерења, рецимо, при објашњењу да један дециметар представља десети део метра, односно једну десетину метра и сл.

Следећа теорија је контрадикторна претходним и произилази из истраживања које је спровела Ханјула (Hannula, 2003). Она је утврдила да је предствљање разломака на бројевној полуправи, велики проблем за ученике петог разреда у Финској, јер се њихово раније искуство заснива на реалним проблемима из живота. Основе за овакво тврђење настале су из ситуације у којој ученици на бројевној полуправи нису успели да представе разломак $\frac{3}{4}$ , а да претходно нису имали представу о целини. С тим у вези, Ханјула сматра да ученици најлакше усвајају појам разломка путем манипулације различитим дидактичким материјалима где је доминантна свесна активност ученика.

Кроз претходни текст покушали смо да укажемо на неке од могућности физичких и визуелно-графичких репрезентација разломака, првенствено модела и манипулативних активности у почетном упознавању разломака. Сви методички приступи које смо споменули у овом раду су корисни и функционални са различитих аспеката, те их треба комбиновати.

## *Истраживања у вези са проблемима ученика приликом схватања појма разломка*

Ово поглавље посветићемо појединим проблемима са којима се сусрећу ученици приликом усвајања појма разломка, који су произишли као резултат бројних истраживања. Њихово разматрање пружиће нам увид у ситуације које представљају потешкоће ученика приликом схватања овог појма. Осим на указане потешкоће видећемо и поједине савете који се односе на то, како приступити изучавању садржајима у вези са разломцима на најефикаснији начин. Детаљну анализу рационалних бројева, различите приступе истим, као и релевантне дидактичке експерименте даје Боното кроз своја истраживања, чији је целокупни смисао боље разумевање разломака кроз различите репрезентације (Bonotto, 1991).

Резнек (Resnick, 1986) истиче да интуитивно размишљање код ученика приликом учења разломака игра битну улогу. Односно, да ће ученици најлакше усвојити појам разломка ако се ослањају на непосредно стечена знања. Бер, Харел, Пост и Лиш (Behr, Harel, Post & Lesh, 1990) сматрају да је манипулација објектима у олакшавању схватања делова целине јако важна, зато захтевају манипулативне активности као обавезне елементе у почетној настави математике. Стрифланд (Streefland 1990, 1991, 1993) истиче да усвајање садржаја у вези са разломцима и рационалним бројевима треба да буде засновано на идеји реалног окружења, водећи се примерима из свакодневног живота, што је заправо одлика данашње методике увођења ученика у разломке.

Њустед и Оливиер (Newstead & Olivier, 1999) су спровели истраживање у Јужној Африци са 42 ученика шестог разреда и дошли су до закључка да ученици показују ограничен успех у учењу разломака. Ограничен успех заснива се на чињеници да ученици разломак схватају само као део целине. У вези са тим, они упућују на то да разломак треба посматрати као део мноштва предмета, разломак као однос и разломак као симбол. Такође износе и да схватање разломка као симбол, треба оставити „по страни“, све док ученици потпуно не схвате појам разломка путем различитих визуелних репрезентација и ситуација из свакодневног живота. Предлажу да ученици разломке прво записују речима нпр. „три четвртине“, уместо $\frac{3}{4}$, јер ће им то олакшати разумевање симболичког записа разломка. Стронг (Strang, 1990) сматра да ограничено разумевање разломака потиче од механичког учења правила из уџбеника. Деца уче без разумевања, што доприноси потешкоћама приликом овладавања појмом разломка и стварању нефункционлних знања.

Кирен (Kieren, 1988) даје теоретски модел математичког грађења знања у вези са разломцима. Тај модел заснован је на „идеалној мрежи“, која обезбеђује најбољи пут изградње знања о рационалним бројевима. Његов модел чини шест нивоа знања, где први представља елементарни ниво познавања наведених садржаја. Затим истиче да се могу посматрати интеракције између различитих нивоа представљања или разумевања. Модел „идеалне мреже“, врши синтезу појмова који се налазе у неком од шест нивоа знања, а то су: део, целина, дељење, количник и разломак.

У оквиру Пројекта истраживања Рационални број (RNP, 1979), говори се о дечјем схватању концепта рационалног броја, где је главна пажња усмерена на појмове: део–целина, децимала, дељење, количник и релација. Основни извор података у овом истраживању био је интервју, на основу кога су проистекле битне информације у вези са тим како ученици схватају разломак.

Успешно разумевање појма разломака ученицима пружа добру основу за развијање појма децималног броја. Станко Првановић (1958) представник савремене методике наставе математике у Србији, потврђује нашу констатацију и наглашава да је основни циљ обраде појма разломка припрема ученика за боље разумевање децималних бројева. Исто мишљење деле и Геилен и остали (Galen, Fejis, Figueiredo, Gravemej, Herpen & Kreijzer, 2008) који наглашавају да разломци представљају важну карику у развоју математичког мишљења. Тиме указују да ученици морају схватити разломке, како би могли формирати базу за разумевање децималних бројева и процената.

Томпсон и Салдона (Thompson & Saldanha, 2003) приликом сумирања резултата својих истраживања до којих су дошли интервјуисањем ученика, приметили су да ученици након што су научили делове целог, често им се као проблем намеће разумевање разломака већих од један. Што иницира нови проблем, који се огледа у овладавању садржајима мешовитих бројева. Истраживање које су спровели Херман и сарадници (Herman et al., 2004) односило се на испитивање ученика узраста од 6 до 9 година у Чешкој, где је било потребно установити способност представљања разломака на два начина: изоловано и у оквиру сабирања. Крајњи резултати су показали да деца лакше схватају разломак као процес поимања, у односу на схватање разломка у процесу сабирања.

Акси (Aksu, 1997) се бавио истраживањем које се односило на разумевање појма разломака од стране ученика и рачунских операција и решавање проблемских ситуација у вези са разломцима. Он је сачинио тест који је имао три дела. Први део је назвао „концепт тест“, други део чинио је тест са рачунским операцијама и трећи део проблемски тест. У испитивању је учествовало 155 ученика шестог разреда. Добијени резултати су показали да је најбоље урађен тест који се односио на рачунске операције у вези са разломцима, док је проблемски тест показао знатно лошије резултате. Међутим, иако је тест са рачунским операцијама донео најбоље резултате, на основу њега се јасно закључило да су ученици много лакше вршили сабирање него множење разломака.

Гулд (Gould, 2011) је на основу свог истраживања описао један од доминантних проблема који се појављује у области разломака. Тај проблем односио се на упоређивање разломака што је за њега представљало бољи увид у разумевање самог појма разломка. Дакле, пред ученицима се нашао задатак да објасне шта је веће $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$, потом $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{4}$, онда $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{5}$ и сл. Резултати истраживања су показали да је већина ученика користила различите дијаграме приликом упоређивања разломака, док се други део ученика одлучио на погрешан корак, упоређујући имениоце. Ученици који су упоређивали имениоце дошли су до закључка да је $\frac{1}{2}$ мања од $\frac{1}{3}$, јер је број два у имениоцу мањи од броја три. Када им се указало на нетачност одговора, кроз неколико адекватних смерница они су дошли до следећег закључка. Ако је именилац мањи онда је разломак већи и обрнуто. Наглашавајући да то правило важи само, ако је бројилац број 1. Коришћење разломака у контексту мерења помаже ученицима да схвате разломке као количину. Разломци са бројиоцем који није један, облика $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ , такође представљају део целине, настају као последица јединичних разломака $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ (Watanabe, 2006). Да би ученици успешно савладали разломке са бројиоцем који није један, неопходно им је знање у вези са јединичним разломцима.

Проблем адекватног изучавања разломака у основној школи заснован је на недоследном методичком приступу овим садржајима. На то нам указује Витман (Wittman, 2013) бавећи се истраживањем узрока који доводи до неразумевања појма разломка од стране ученика. Повезивање различитих репрезентација разломака није довољан услов за развијање концептуалног разумевања разломака, истиче Продиџер (Prediger, 2013). У вези са тим она испитује различите могућности учења путем визуелних модела. Тако долази до закључка да се тиме постиже свеобухватнији структурни приступ учењу садржаја о разломцима.

Проналажење заједничких теорија и модела у циљу превазилажења потешкоћа у домену истраживања у вези са разломцима, може нам помоћи да изградимо сопствене закључке како бисмо на што адекватнији начин приступили садржајима који се тичу разломака (Brown, 1993). Бавећи се разумевањем и разматрањем идеја и закључака до којих су дошли сви споменути истраживачи, било нам је од велике помоћи да дубље сагледамо проблем усвајања садржаја о разломцима.

## ЗАКЉУЧАК

Потреба за ефикасним основним образовањем је једна од најбитнијих одлика данашњег васпитно-образовног процеса. Када се пребацимо на подручје математике и на усвајање садржаја у вези са разломцима, можемо констатовати неопходност валидних метода и облика учења, како би се овладавање наведеним садржајима учинило ефикаснијим. На основу анализе релевантне литературе и резултата већег броја истраживања, дошли смо до нових сазнања у вези са разумевањем репрезентација разломака у почетној настави математике. Кроз искуства многих истраживача током бављења проблемом усвајања разломака, расветлили смо методички смисао обраде ових садржаја и упознали се са проблемима ученика приликом разумевања репрезентација разломака.

Прво, да би се изградила ментална слика разломка потребно је користити различите репрезентативне моделе. Пре свега то би требало да буду модели из свакодневног живота ученика и њиховог реалног окружења, којима ученици могу манипулисати. Потом, модели равних осносиметричних фигура, који захтевају различите активности ученика (резање, пресавијање, бојење).

Друго, да бисмо повећали визуелизацију садржаја у вези са разломцима, потребно је користити бројевну полуправу (метод дужи), чија се улога огледа у изградњи предстојећих знања, првенствено код мера и мерења. Дакле, комбиновање свих споменутих репрезентативних модела разломака само је једно од могућих решења проблема са којим се ученици сусрећу приликом разумевања овог појма.

Коначно, као треће, релевантна истраживања у овом раду пружила су нам увид у бројне проблеме на које ученици наилазе приликом разумевања појма разломка, и у том смислу указала на различите могућности њиховог превазилажења. Учење разломака на уобичајени начин, ученицима и даље диктира извесне потешкоће. У вези са тим, надзире се неопходност приступања савременим наставним системима и облицима учења, приликом обраде ових садржаја. Код развоја концептуалног разумевања разломака, различити визуелни модели биће од велике помоћи. Такође, пажњу је потребно усмерити и на учење разломака већих од један, како се ученици не би нашли у проблему при сусрету са мешовитим бројевима.

Разумевање појма разломка од великог је значаја ученицима да се касније лакше упознају са појмовима: мешовити број, децимални број, проценат, количина итд. Као и да лакше овладају садржајима у вези са мерама и мерењем. Сходно томе, можемо констатовати, да је тема овог рада оправдано исказала потребу да је дубље истражимо. Из рада су проистекла нова питања, а основно је питање адекватан избор метода и поступака за ефикасно резумевање репрезентација разломака. Заинтересовани читалац овог рада може размишљати о неким новим релевантним поступцима, који ће омогућити ученицима да потпуно овладају појмом разломка.

Литература

Aksu, M. (1997). Student performance in dealnig with fractions. The Journal of Educational Research, 90, 375–380.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics Educational studies in matematics, 52, 215–241. Netherlands: Academic Press.

Ball, D.(1990). The mathematical understanding that preservice teachers bring to teacher education. Elementary school journal, 90, 499–466.

Ball, D. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 157–196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1990). On the operator concept of rational numbers: Towards a semantic analysis.Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Boston, MA.

Berlin, D. F. & White, A. L. (1995). „Connecting School Science and Mathematics”.

In: Connecting Mathematics across the Curriculum, Ed. House, P. A. & Coxford, A. F., National Council of Teachers of Mathematics, 1995. Yearbook, Reston, Virginia.

Bonotto, C. (1991). Numeri razionali. Approcci diversi e relative sperimentazionididattiche. L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 14, 7, 607–638.

Brown, A. (1993). A critical analysis of teaching rational number. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A.. (eds.) (1993). Rational numbers: as integration of research. Hilsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum. 197–218.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. & Keijzer, R. (2008). Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6. Rotterdam: Sense.

Gould, P. (2011). Developing an Understanding of the Size of Fractions. The Australian Association of Mathematics Teachers (pp.63–70).

Goldin, G. and Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical; concepts. In: A. Cuoco and F. Curcio (Eds.), The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook (pp.1–23). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Duval, R. (1999). Representation,vision and visualization:Cognitive functionsin mathematical thinking. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), Pro-ceedings of the Twentyfirst Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 3–26). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Дејић, М. и Егерић, М. (2010). Методика наставе математике. Београд: Учитељски факултет.

Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања (2011). Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања из Математике, Београд.

Kieren T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In: Hiebert J., Behr M. (eds.) (1988). Number concepts and operations in the middle grades. Reston (Va): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass. 162–181.

Lazić, B. (2014). Propedevtičko uvođenje sadržaja o razlomcima u aritmetici za mlađe razrede osnovne škole (doktorska disertacija). Beograd: Učiteljski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Милинковић, Ј. (2013). Увод у разломке, XXIX Специјализовани републички семинар за наставнике математике у основним и средњим школама, 11. 01. 2013. Београд: Математичко друштво „Архимедес“.

Милинковић, Ј. (2016). Огледи о учењу у настави математике, Београд: Учитељски факултет Универзитета у Београду.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије (2015). Наставни програм за први циклус основног образовања и васпитања. *http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/*

Мићић, В. (2010). Од природних до реалних бројева у старијим разредима основне школе, Настава математике, 239, (20–29). Београд: ДМС.

Post, T. R. & Cramer, K. A. (1989). Knowledge, representation, and quantitative thinking. In M. C. Reynolds (Ed.), Knowledge base for the beginning teacher (pp. 221–232). New York: Pergamon.

Првановић, С. (1958). Методски приручник за извођење наставе аритметике. Београд: Библиотека просветних радника.

Prediger, S. (2013). Focussing structural relations in the bar board – a design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in mathematics Education, Antalya, 343–352.

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), Percpetives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology (Vol. 19, pp. 159–194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Small, M. (2009). Teaching to the Big Ideas K-3, Mathfocus K-3, Nelson.

Strang, T. (1990). The fraction-concept in comprehensive school at grade-levels 3–6 in Finland. In G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (Eds.), Proceedings of the 14th PME International Conference, 3,75–80.

Streefland L. (1990). Fractions in realistic mathematics education. Dordrecht: Kluwer.

Streefland L. (1991). Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer.

Streefland L. (1993). Fractions: a realistic approach. In: Carpenter T.P., Fennema

E., Romberg T.A. (eds.) (1993). Rational numbers: an integration of research. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Ass. 289–325.

Thompson, P. W. & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning.

In J. Kilpatrick, W. G. Martin,& D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 95–113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tobias, J. M. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. Journal of Math. Teacher Education, 16, 85–103.

Treffers, A. (1987). Three dimensions. A Model of Goal and Theory Descriptio in mathematics Instruction – the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fandiño, Pinilla M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. Acta Didactica Universitatis Comenianae. 7, 23–45.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2002).Young Mathematicians at Work Constructing Fractions, Decimals, and Percents. Portsmouth: Heinemann.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. China lectures. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Herman, J., llucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J. & Simpson, A. et al. (2004). Images of fractions as proccesses and images of fractions in processes. In M. J. Heines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th PME International Conference, 4, 249–256.

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Patonan. B. J. Dougheny, & J. T. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 3, 17–24.

Charalambos, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In H. L. chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th PME International Conference, 2, 233–240.

Cramer, K. & Henry, A. (2002). „Using Manipulative Models to Build Number Sense for Addition and Fractions." In Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Bonnie Litwiller and George Bright, pp. 41–48. Reston, VA: NCTM.

Ševčenko, I. N. (1967). Metodika nastave običnih razlomaka. Beograd: Jugoslovenski zavod za proučavanje školskih i prosvetnih pitanja.

Watanabe, T. (2006). Teaching and learning of fractions: A Japanese perceptive, Teaching Children Mathematics, 12(7), 368–372.

Witman, G. (2013). The consistency of students' error patterns in solving computational problems with fractions. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in mathematics Education, Antalya, 393–402.

Olivera S. Zivanovic
Elementary School, Borivoje Ž. Milojevic

PROBLEMS OF PUPILS IN DEVELOPMENT REPRESENTATION OF DIFFERENCE IN TEACHING MATHEMATICS

**Summary:** This paper is based on theoretical analysis of the research in the field of fractions, with the special attention on students' problems with understanding the representation of fractions in the beginner's level of mathematics teaching. The aim of this paper is a solution of the problem which students encounter while trying to understand representations of fractions. The presented research used for this paper was a guidepost to obstacles students have to deal with while trying to understand the notion of fractions with the intention to overcome them. The paper consists of the two parts. The first one is dedicated to methodical approach of the content related to fractions. In the other part however, the attention is directed towards presentation of the relevant research related to the students' problems with understanding this notion. According to the previous theories and models we came to the following conclusions. Firstly, an adequate manipulation of representative models of the fraction will form the mental image of fraction, specially models from ordinary pupil's life. Secondly, increasing of visual contents about fractions can be done by using a number line. Thirdly, while teaching this subject it is necessary to use innovative models of teaching because using of wide range of teaching systems contributes to better understanding of representations of fractions.

**Key words**: representation of fractions, a problem, teaching of the mathematics on the beginner's level, methodical approach.

***Рад је примљен 08. 07. 2017. године, а рецензиран 01. 10. 2017. године.***


Math