Снежана Савић
Учитељски факултет Универзитета у Београду, студент

Стручни рад
Методичка пракса број 1. 2017
УДК: 371.3
стр. 141 - 152

ВАН ХИЛЕОВА ТЕОРИЈА ГЕОМЕТРИЈСКОГ МИШЉЕЊА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Резиме: Иако су двадесети век обележила истраживања из области алгебре, појава теорија геометријског мишљења подстиче интересовање за геометријске садржаје. Са порастом интересовања за геометријске идеје важно је истраживати о природи геометријског резоновања и како се развија. Циљ овог рада је преглед теоријског оквира ван Хиелеовог модела размишљања у геометрији. Прво, дајемо ван Хилеову теорију геометријског резоновања, нивое разумевања просторних односа и фазе учења геометријских садржаја. Друго, приказујемо и анализирамо тумачења ван Хилеове теорије. Затим, дајемо кратак преглед истраживања базираних на ван Хилеовој теорији. У раду је коришћен метод теоријске анализе. На основу истражене литературе закључујемо да је још увек потребно много истраживања о дубоком процесу развоја и учења геометријског резоновања.
Кључне речи: геометрија, геометријско мишљење, ван Хилеове нивои геометријског мишљења, фазе геометријског мишљења.

УВОД

У последњим деценијама двадесетог века појавило се много позива за промену математичког образовања. Идеја за променом математичког образовања потиче из доказа о недостацима садашњих школских програма које утврђују светска тестирања (PISA, TIMSS) и међународна поређења наставних програма. Милинковић

(Милинковић, 2016: 26) је кроз упоређивање курикулума Србије и курикулума Сингапура, Јужне Кореје, Рисује и САД, уочила да наведене земље пажњу посвећују развоју способности визуелног сагледавања простора, оријентацији и просторном резоновању. Анализа курикулума и резултати ученика на светским тестирањима из математике отварају питање да ли су ученици когнитивно зрели за математичке садржаје који се уче у одређеним разредима. На ово питање је покушала да одговори Милинковић (Милинковић, 2016: 28) ослањајући се на истраживања спроведена у Србији. Аутор сматра да су ученици когнитивно зрели да усвајају садржаје прописане наставним планом и програмом и да би свако мењање курикулума захтевало и повећање фонда часова и измењене уџбенике.

Геометрији се у нижим разредима основне школе посвећује мало пажње и заснива се на меморисању и одвојена је од реалности. На основу плана и програма образовања и васпитања, иако је прописано 5 часова математике недељно, садржај геометрије заузима у просеку само 27 часова геометрије годишње, што је 15% укупног броја часова. Основни задатак је да ученици упознају најважније равне и просторне геометријске фигуре и њихове узајамне односе, а оспособе ученике за прецизност у мерењу, цртању и геометријским конструкцијама[16]. Према теоријској анализи Саве Ћебића (2005) у настави математике је дошло до деформације основних циљева наставе геометрије. Јавља се представа да је главни циљ наставе геометрије развијање логичког мишљења.

ВАН ХИЛЕОВА ТЕОРИЈА ГЕОМЕТРИЈСКОГ МИШЉЕЊА

Пијер и Дина ван Хиле бавили су се откривањем узрока лошег успеха ученика у учењу геометријских садржаја и конкретним методама које би допринеле превазилажењу тих проблема. Њихова теорија, изложена у дисертацијама[17], помаже у схватању разумевања геометријског мишљења и менталних процеса. Размишљање се развија из гешталт визуелног нивоа кроз нивое описа, анализе, апстракције и доказа (Van Hiele, 1986).

Модел геометријског резоновања ван Хилеа даје нивое размишљања и фазе учења, као и форму организовања знања. У ван Хилеовој теорији наводе се пет нивоа геометријског мишљења. Сваки ниво разликује форме математичког размишљања, који се развија од најнижег ка вишим. Нивои су окарактерисани одређеним формама и користе различите математичке концепције, на различите начине интерпретирају и

[16] Наставни план и програм основног образовања и васпитања.

[17] P.M. van Hiele (1957). The Problem of Insight, in Connection With School-children's Insight Into the Subject Matter of Geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht.

D. van Hiele-Geldolf (1957). The Didactics of Geometry in the Lower Class of the Secondary School. Doctoral dissertation, University of Utrecht.

класификују геометријске појмове. Према мишљењу ван Хилеа сви морају поћи од нултог нивоа и не могу се прескакати нивои. Прелазак са једног на други ниво није временски одређен и не зависи од узраста детета. На пример, ученик у нижим разредима може се наћи на нивоу 1, док неко целог живота може бити на нивоу 0. Најважније при развијању геометријских способности и напредовања кроз нивое је геометријско искуство. Што је богатије геометријско искуство на неком ниво већа је могућност преласка на следећи ниво.

Следи кратки приказ ван Хилеових нивоа геометријског мишљења. Наводимо сваки од нивоа и њихове караткеристике (Романо, 2009; van Hiele, 1986; Clements & Battista, 1992).

Ниво 0: *Визуелизација*. На нивоу визуелизације геометријске фигуре се препознају према свом облику. Ученици геометријске фигуре опажају као целине и препознају само по изгледу, на разликују им се делови и често упоређују са прототипома које знају. Они могу препознати и нацртати копију одређене фигуре и именовати је. Такође, ученици могу да говоре о својствима фигура али не мисле о томе експлицитно. На овом нивоу користи се веома једноставан језик. Углавном се користе изрази: „овај предмет има облик...“, „личи – не личи на...“. Ученици су способни да препознају да је дати облик правоугаоник зато што он, на пример, личи на врата. Уколико бисмо правоугаоник ротирали за 30˚ ученици не би препознали правоугаоник. На овом нивоу треба радити вежбе препознавања геометријских облика, ротираних геометријских облика и користити не-примере.

Ниво 1: *Анализирање*. Ученици види геометријске облике као скуп својстава и разврставају их унутар класа. Они су у стању да препознају врсте геометријских облика и упознају основну терминологију. Циљ овог нивоа је да обучи ученике да на основу карактеристика препозна облик. „Када описујемо неки објекат ученици набрајају све његове особине, али не могу да разграниче које су од њих потребне а које су довољне да га опишу“ (Романо, 2009b: 2). На овом нивоу карактеристике фигура се утврђују посматрањем, мерењем, цртањем и прављењем модела. Ученици схватају да облик фигуре не зависи од положаја и величине. На пример, једнакостранични троугао препознају по трима једнаким страницама, три једнака угла, према симетричности троугла. Међутим, ученици на овом нивоу не виде односе између класа (да фигура је правоугаоник, јер је квадрат). Циљ оваквог резоновања геометријског облика јесте успостављање односа између својстава и класа фигура.

Ниво 2: *Апстракција (неформална дедукција)*. Ученици препознају разлику између особина геометријских облика и на основу тога праве односе међу саме геометријске облике. Ученици могу да формирају апстрактне дефиниције, да увиђају разлику између потребних и довољних услова за геометријски појма и да понекад дају логичке аргументе у геометријском домену. Могу да хијерарijски класификују фигуре и да дају неформалне аргументе да оправдају своју класификацију. „На овом нивоу ученици почињу да размишљају о томе шта је потребно а шта довољно да се неки геометријски лик опише“ (Романо, 2009b: 3).

Ниво 3: *Дедукција*. Ученици успостављају теореме у оквиру аксиоматског система. Они могу идентификовати особине ликова, конструисати доказе користећи исказе, аксиоме и дефиницију, способни су да изграде оригиналне доказе. Ниво дедукције одговара средњошколској геометрији. На овом нивоу ученици при закључивању ослањају се на логику пре него на интуицију.

Ниво 4: *Ригидни-математички ниво*. Ученици формално расуђују о математичким системима. Овај ниво одговара курсевима на факултетима. Ученици могу да проучавају геометријске односе и у одсуству модела и да разумеју комлексност аксиоматсног система.

Постоји различита нумерација ван Хилеових нивоа геометријског мишљења. Изворни рад ван Хилеових нумерише нивое од нивоа 0 до нивоа 4. Касније се јавља нумерација од нивоа 1 до нивоа 5. У свом раду ван Хиеле (1999) описује три нивоа геометријског мишљења и то су ниво визуелизације, ниво дескрипције и ниво неформалне дедукције. Док Батиста и Клементси (1992) су препознали још један, шести ниво који би одговарао пре-визуелном нивоу. На овом вивоу деца опажају геометријске облике, али се баве само визуелним карактеристикама облика, нису у стању да препознају многе заједничке карактеристике геометријских облика. Деца на овом нивоу могу уочити разлику између праве и криве линије, а не и сличности у истој класи тако да уочавају разлику између круга и троугла али не и између троугла и квадрата.

Напредовање кроз нивое геометријског мишљења зависи од инструкције предавача, тако да Ван Хилови истичу пет фаза са одговарајућим поступцима који би могли ученицима помоћи у савладавању нивоа. То су фазе (према Clements, Battista, 1992, из разговора са ван Хилеом):

- *Фаза информисања*: Ученици се упознају са материјалима и кроз дискусију учитељ упознаје на који начин ученици схватају садржаје, колико су упознати са темом и покушава да схвати њихов језик.
- *Фаза усмереног вођења*: Учитељи дају ученицима материјале и циљ је да током наставе буду активни у истраживању геометријских појмова. Задатак учитеља је да изаберу релевантне материјале, да усмере ученике и да рад буде структуисан.
- *Фаза објашњавања*: У овој фази ученици разрађују своје интуитивно знање и постају свесни својих геометријских поимања, описују схватања на свом језику. Затим учитељ уводи одговарајућу математичку терминологију.
- *Фаза слободног усмеравања*: Ученици решавају проблеме чије решавање захтева синтезу и коришћење односа који су раније разрађени. Улога учитења је да изабере одговарајуће материјале и да давањем одговарајућег упутства омогући ученицима да дођу до решења.
- *Фаза интегрисања*: У овој фази ученици интегришу стечено знање у кохерентну мрежу што је основа за прелазак на виши ниво.

Клемент и Батиста (Clements, Battista, 1992: 439) дају следеће карактеристике ван Хилеове теорије:

- Учење је испрекидан процес.
- Нивои су хијерархијски распоређени. „Ученик не може да пређе на следећи ниво уколико није овладао великим делом нижег нивоа“ (Hoffer, 1981: 14). Прелазак на следећи ниво више зависи од иструкција него од старосне доби или биолошког сазревања ученика.
- Концепти који су посредно схваћени на једном нивоу, постају јасни на следећем. „На сваком нивоу на непосредан начин се појављује суштина претходног нивоа“ (Van Hiele, 1984: 246).
- „Сваки ниво има своје лингвистичке симболе и сопствени систем односа који повезује ове симболе. Релација која је тачна на једном, може бити нетачна на другом нивоу. Двоје ученика на различитим нивоима не могу да разумеју једни друге. Језичка структура је кључни фактор у покрету кроз нивое“ (Van Hiele, 1984: 246).

АНАЛИЗА И ТУМАЧЕЊА ВАН ХИЛЕОВЕ ТЕОРИЈЕ

Према ван Хилеовој хијерархији деца схватају облик на узрасту од 4 године и нису у стању да разликују облике према својим особинама пре поласка у школу, због тога нису у стању да издвајају карактеристичне особине геометријских облика пре тога.

Не може се тачно утврдити колико је времена потребно да се са једном нивоа пређе на следећи. Дина ван Хиле је 1957. године изнела теорију да је за прелазак са једног на следећи ниво потребно 20 лекција, односно 50 лекција са нивоа један на ниво два. (Romano, 2009: 9)

У свом раду ван Хиле (van Hiele, 1999) пише о неспоразуму у свом раду Structure and Insight (1986). Ханс Фројдентал је изнео критику за ван Хилеово тврђење: „Размишљање без речи није размишљање“. Ван Хиле исправља своје раније тврђење и пише: „Уколико невербално мишљење не припада реалном мишљењу, онда ми иако смо будни не размишљамо већину времена“ (van Hiele, 1999: 311). Невербално размишљање је од посебног значаја, јер свако рационално размишљање има своје корене у невербалном размишљању и многе одлуке доносе само такве мисли. Ми посматрамо нешто а да о томе не проговоримо ни реч. Развијање мишљења ученика зависи више од дате инструкције него од година ученика, и инструкција може убрзати или успорити развој. За прелазак на виши ниво потребно је да ученици истражују како би дошли до нових сазнања.

У свом раду Пападеметри (K. Papademetri-Kachrimani, 2012) наводи парадоксалнна тврђења која су изнета у раду ван Хилеа (van Hiele, 1986). Пападеметри поставља следећа питања: да ли можемо да учимо без размишљања и како ћемо учити уколико не мислимо. Изненадило је сазнање колико деца која још не говоре препознају геометријске облике. Њихова неспособност да говоре није навела аутора да помисли да деца не мисле. Пападеметри сматра неистинитом тврдњу да геометријске облике посматрају као целину без обраћања пажње на структуру фигуре и да се геометирјско мишљење може описати као хијерархијска форма. *Да ли су деца на нивоу визуелизације и пре него што проговоре*? Ван Хилеов покушај да се повећа наглашена вредност интуиције, била је оповргнута у већини истраживања. Пападеметри сматра да парадокс лежи у ван Хилеовом тврђењу да је код деце вербално изражавање мишљења једини начин изражавања мишљења и да подржавајући интуицију, говори о мишљењу без речи. Ван Хиле некако препознају да постоји таква ствар као што је мислити без речи, али му је тешко да га означи као мишљење.

Питањем да ли су нивои геометријског мишљења ван Хилеа хијерархијски бавили су се Клементс и Батиста (1992), Клементс и Самара (2000). Клементс и Батиста су скоро пре две деценије разматрали ово питање. Након изучавања литературе они су закључили да се чини да су нивои хијерархијски распоређени, али остаје потреба да се то подвргне ригорозном тестирању. Клементс и Самара су наставили да описују нивое као хијерархијски систем. „Ученици на различитим нивоима на различити начин схватају геометријске облике, и схватају облик квадрата на различите начине. У преоперационом периоду квадрат је означавао само прототип. За визуелно мишљење, квадрат може да личи на књигу са савршеним крајевима, без обзира на који страну је ротирана. За дескриптивно мишљење, квадтар је облик са једнаким страницама и правим угловима. Међутим, на нижим нивоима деца не могу да уоче повезаност правоугаоника и квадрата, да је квадрат правоугаоник са једнаким страницама“ (Clements, Samara, 2000: 482).

Клементс и Самара (2000) описују сваки ниво као нижи облик размишљања у односу на виши ниво, карактеришу их оно што дете (не) може да уради и објасни да док иду према вишем нивоу, деца знају више. Ово јасно нам показује да су ван Хилеови модели хијерархијски поређани.

Маргарит Мејсон (Mason, 2008: 6) се бавила питањем размишљања учитеља. Према ван Хилеовим нивоима предавачи математике на факултетима налазе се на четвртом или петом нивоу. Мејсон наводи да истраживања показују да се полазници вишег курса математике налазе на првом или другом нивоу. Учитељ и ученик, иако користе исте речи, могу да их интерпретирају на различите начине. „Ученик може да сматра, да у циљу да докаже да је фигура квадрат, све особине морају бити доказане. Наставник, који мисли на вишем нивоу, познаје не само особине квадрата већ препознаје оне особине које могу бити искоришћене за доказ да је фигура квадрат“ (Mason, 2008: 6).

У својим истраживања Бургер и Шонеси (Shaughnessy, Burger, 1985, 1986) су истакли неколико чињеница којих нису ни били свесни на почетку. Прво, нивои имају јако сложену структуру што укључује развијање и појмова и процеса резоновања примењених на многе задатке из окружења. Друго, како ван Хејлова теорија наглашава да су нивои дискретни, њихово истраживање није открило ту чињеницу. Такође су запазили да ученици могу да напредују и назадују између нивоа неколико пута док су у транзицији тј. прелазу из једног нивоа у други, нарочито када се ради о ниво између 1 и 2, али не и другим нивоима.

ПРЕГЛЕД ИСТРАЖИВАЊА БАЗИРАНИХ НА ВАН ХИЛЕОВОЈ ТЕОРИЈИ МИШЉЕЊА

Да су ван Хилеови нивои геометријског мишљења тачно описани потврђује нам неколико истраживања (Burger, 1986; Fuys, 1988; Clements, 1999, 2000; Romano, 2009, 2010).

У својим истраживањима Шонеси и Бургер (Shaughnessy, Burger, 1985, 1986) баве се испитивањем да ли ван Хилеови дају тачан и користан оквир за описивање геометријког мишљења. Њихово тумачење ван Хилеових нивоа је веома значајно јер, на основу сопственог истраживања, они их описују на више динамичан и континуиран начин. Вршени су интервјуи са ученицима основних и средњих школа и будућим наставницима математике. Аутори су пре истраживања поделили, на основу ранијег успеха у школи, ученике у групе обзиром на који ниво се налазе. Истраживање је оповргло овакву поделу. У радовима дају примере и дидактичке сугестије предавачима математике. Они сматрају да нивои нису дискретни и да се ученици могу наћи на прелазу нивоа мишљења и њихов ниво мишљења може бити различит. Тако ученик из области једног геометријског облика може бити на једном нивоу, док за другу геометријску фигуру се може налазити на нижем нивоу.

Бургер и Шонеси (Shaughnessy, Burger, 1986) су коришћењем интервјуа базираног на задацима, дошли до карактеристика мишљења ученика на прва четири нивоа. Дајемо мишљења аутора о сваком од нивоа. Ученици на нивоу визуелизације често користе нерелевантна визуелна својства за идентификацију и опис геометријских фигура, фигуре памте по примерима које су раније сретали, недоследни су у класификацији фигура. Ниво анализирања карактерише експлицитна поређења ликова на основу њихових основних особина, избегавају се инклузије између различитих класа облика, описивање облика на основу својстава и одбацивање дефиниција других особа. Ниво апстракције карактерише формирање економичне дефиницје за фигуре, способност превођења некомплетне дефиниције у комплетну, хијерархијски класификују фигуре, непотпуно јасно коришћење дефиниција, доказа и аксиома. Ниво дедукције карактерише разумевање појединих функција аксиома, дефиница и доказа и долажење до сопствених закључака, покушавање да се исти и докажу.

Фис (Fuys et al, 1988) проналази да је ученике у транзицији тешко поуздано класификовати. Тешкоће су се највише јављале на нивоима два и три, где су тешкоће у одлучивању између нивоа сматрани дискретном природом нивоа. Тешкоће у развијању геометријског мишљења повезане су са степеном познавања речника, заблудама које произилазе из недовољног искуства. У свом раду потврдили су да су нивои хијерархијски јер ученик не може радити са разумевањем на једном нивоу а да није прошао кроз претходне.

Клементс и група (Clements et al, 1999) бавили су се истраживањем критеријума предшколске деце које користе за разликовање чланова класа од осталих фигура. Вршени су индивидуални интервјуи са децом наглашавајући идентификацију и опис облика и разлога за ове идентификације. Дошли су до сазнања да ученици имају висок степен идентификације кругова. За децу лако је препознати круг али га је тешко описати, што одговара визуелном нивоу геометријског мишљења. Деца су била значајно слабија у препознавању облика квадрата. Ови резултати су две теоријске импликације које тичу геометријског разумевања деце. Подаци подржавају тврдње аутора да преоперациони стадијум постоји пре нивоа визуелизације геометријских облика. Разлика између детета на преоперационим нивоу и нивоу визуелизације: деца не могу поуздано да разликују троуглове, кругове и квадрате од не-примерака ових класа; они који уче треба размотрити као транзицију ка визуелном нивоу.

Клементс и Батиста (Clements, Battista, 1994) бавили су се истраживањем могућности развоја геомеријског мишљења ученика и њиховог преласка са једног на други ниво путем рачунара. Истраживање је показало да израда геометријских идеја у конструкцијама рачунара олакшава њихово напредовање ка вишем нивоу мишљења. Природно окружење на програмима омогућава повезивање формалних представа са визуелним представама.

Коришћење рачунара пружа ученицима динамично окружење упознавања и анализирања геометријских облика. Статистичке форме обраде геометријских садржаја су досадни ученицима и без непосредне повратне информације (Scher, 2002).

Научно друштво математичара Бања Лука је реализовало пројекат „Утврђивање образовних нивоа у математици" 2009. године. Међу публикованим чланцима издвајамо радове Даниела Романа и сарадника. Даниел А. Романо је редовни професор на Педагошком факултету у Бијељини. У овом пројетку анализираћемо закључке следећих чланака [1], [14], [15]. У раду Романо и сарадници (2010) пре основног истраживање баве се реаговањем студената студијског програма за учитеље у ситуацијама када се сусретну са потребом да прецизније опишу основне елементе геометрије и њихове међусобне односе. Анкетирање је показало да су геометријска знања будућих учитеља веома скромна. Чак 61% студената није понудило никакве одговоре на питања, а аритметичка средина износи 4,90 од могућих 25 бодова, што је 19,6%. Аутору постављају следеће питање:

„*Како ће будући учитељи преносити геометријске идеје ученицима нижих разреда основне школе и подстицати развој просторног и геометријског мишљења до нивао 1 код својих ученика ако ниво разумевања тих идеја код учитеља не прелази ниво 1* (по ван Хилеовој класификацији)?" (Романо и сар, 2010: 3).

На основу обављеног тестирања и анализирања аутори су закључили да студенти тумаче појмове тачка, права, раван позивајући се на визуелизацију тих физичких објеката. Аутори су извели закључак да студентка знања о појму угла одговарају првом нивоу ван Хилеа, чак 69 испитаника је погрешно одговорило на питања о углу. На основу наведеног схватамо значај побољшања геометријског знања на свим образовним нивоима.

Истраживањем на ком нивоу се налазе ученици у почетној настави бавио се у свом мастер раду Златан Марковић (2013) под менторством Даниела А. Романа. На основу спроведеног истраживања и анализе радова дошао је до закључка да већина тестираних ученика од 7 до 10 година се налазе на нултом ниву, тј. ниво визуелизације према ван Хилеовој теорији, а само мали број ученика налази се на првом нивоу. Аутор сматра да је оправдано увођење шестог пре-визуелног нивоа од стране Клементса и Батисте (1992). „Приликом одређивања категорија геометријских фигура код ученика у нижим разредима основне школе доминира у великој мјери перцепција, а не фигурално својство“ (Марковић, 2013: 75). Као разлоге за потешкоће ученика при усвајању геометријских садржаја аутор наводи да учитељи цртају нове геометирјске облике без указивања на дефиниције и неретко се позивају на претходна ученичка знања, на усвајање садржаја утиче и сложеност дефиниције која може у себи укључити велики број својстава одређеног геометријског облика. На основу интервјуа са наставницима математике аутор је потврдио своју полазну хипотезу да наставници на познају добро градиво о основним геометријским појмовима.

„Шта ће се десити уколико учитељ држи наставу на вишем нивоу него на ком је ученик? Најчешће ученик неће разумети садржај који се учи. Обично ће ученик покушати да запамти материјал и можда ће се чинити да је савладао, али он га неће разумети. Ученици могу лако да забораве материјал који је запамћен или могу бити неспособни да га примене, посебно у непознатим ситуацијама.“ (Mason, 2008).

Власновић и Циндрић (Vlasnović, Cindrić, 2014) бавили су се истраживањем да ли ученици у почетној настави математике напредују према ван Хилеовим нивоима. На основу анализе резултата аутори су закључили да ученици напредују према ван Хилеовој подели. Из претходног закључују да настава математике омогућава развијање геометријског мишљења. Није могуће јасно уочити прелаз са нивоа визуелизације на ниво анализе, што потрвђује општу карактеристику ван Хилеових нивоа.

У раду Ма и сарадника (Ma et al, 2015) изнесен је део резултата спроведеног пројекта „A Study of perceptual apprehensive, operatice apprehensive, sequental apprehensive, and discirsive apprehensive for elementary school students (POSD)“. У истраживању је учествовало 5 581 ученик из 23 градова на Тајвану. На основу резултата дошли су до доказа које подржавају хијерархијску поделу ван Хилеових нивоа, закључили су да ученици на различитим нивоима на различит начин схватају основне геометријке фигуре и у основној школи не постоји разлика у преласку из нижег на виши ниво између девојчица и дечака.

Кузниак и Рошер (Rauscher, Kuzniak, 2005) бавили су се трајношћу геометријског знања, на који начин студенти основних студија реагују на основне геометријске задатке. Поставља се питање шта се може научити из њихових реакција о знању и схватањима геометрије које су задржали од њиховог школовања. Аутори су користили ван Хилеову поделу геометријског мишљења. Ову теорију тумаче као теорију за развој мишљења међу ученицима а не и за одрасле јер одрасли могу да користе другачију аргументацију приликом давања одговора. Кузниак и Рошер поделили су одрасле у три категорије. У прву категорију налазе се свршени ученици са солидним знањем о основним карактеристикама фигура, они су најчешће бивши студенти математике или неког од факултета. Њихово знање налази се на нивоу 3. „Други премењују своја знања и осетљиви су на процену резултата у окриву мерења у окружењу. Једни користе визуелну индукцију, док други користе резултате добијене помоћу инструмената.“, (Rauscher, Kuzniak, 2005: 746).

Фујита и Џонс (Fujita and Jones, 2007) у свом истраживању полазе од чињенице да класификација четвороуглова ученицима представља проблем због сложености четвороуглова и неспособности да праве разлику између карактеристичних и некарактеристичних особина. Циљ рада је да пружи теоријску основу за дату тему. Ученици на нивоу апстракције, према ван Хилеовој подели, могу извести закључак да је правоугаоник паралелограм. Ученик на нивоу анализе може да препозна својства паралелограма и правоугаоника, док на нивоу визуелизације ове геометријске облике опажају као целине. Аутори предлажу да се у будућим истраживањима може испитати имплицитна повезаност основих особина четвороуглова и идентификације заједничких особина. Из пилот истраживања Фујита (2008) изводи закључак да ученици формално схватају дефиниције четвороуглова, повезивање је тешко чак и на нивоу анализирања.

ЗАКЉУЧАК

Геометрија и просторно резоновање су важни, тумаче и одржавају се на физичко окружење и чине темеље за учење математике и других предмета. Рано детињство и основна школа су значајни за схватање геометријских појмова, а учитељи мало времена проводе у интеракцији са ученицима у овим областима.

Образовни и психолошка истраживања су показала да деца изграђују идеје о облицима акцијама, а не само пасивним гледањем. Деца треба да истраже облике у потпуности, укључујући њихове делове и трансформације. Они треба да их заступају на цртежима, објектима, драматизацијама и вербалним језиком. Облици који су пред њима треба да садрже богат, разноврсне примере. Све већи је значај укључивања рачунара у савладавању геометријских садржаја.

Наведени преглед, прилично развијених оквира за описивање и разумевање развоја геометријског резоновања, има за циљ да пружи кратак преглед о ван Хилеовој идеји о нивоима геометријског мишљења. Такође, наглашавамо когнитивну комплексност геометрије. Како Дувал наводи, потребна су многа истраживања о дубоком процесу развоја и учења визуелизације и расуђивања.

На основу изложеног у раду можемо закључити да је ван Хилеова теорија геометријског мишљења била подстрек и основа за многа истраживања и развијање различитих виђења геометријског мишљења. Поред испитивања на ком се налазе ученици одређених разреда основних школа, ван Хилеови нивои и њихове карактеристике биле су основа за анализирање уџбеника математике и начина на који су геометријски садржаји обрађени у њима. Нека од наредних истраживања може бити истраживање начина представљања геометријских садржаја у нашим уџбеницима.

Литература

1. Biblija, D., Milanković, J., Romano, D., Runjić, N. (2009). Teorija van Hiele-ovih o razumjevanju geometrije. Banja Luka, XV (2), 5-17.
2. Burger, W.F., & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizijonesng the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 31-48.
3. Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије (2015). *Наставни програм за први циклус основног образовања и васпитања. http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/*
4. Ma, H.L., Lee, D.C., Lin, S.H., Wu, D.B. (2015). A Study of Van Hiele of Geometric Thinking among 1st through 6th Graders. *Eurasia Hournal of Mathematics, Science & Technology Education*, 2015, 11 (5), 1181 – 1196.
5. Марковић, З. (2013). Проблеми наставе геометрије приликом усвајања основних геометријских појмова у нижим разредима основне школе. Мастер рад. Бијељина: Педагошки факултет.
6. Mason, M. (1997). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. Geometry: Explorations and Applications (Professional Handbook For Teachers). 4-8.
7. Милинковић, Ј. (2016). Огледи о учењу и настави математике. Београд: Учитељски факултет.
8. Fujita, T., Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*, 9, 3-20.
9. Fujita, T. (2008). Learners' Understanding of The Hierarchical Classification of Quadrilaterals. In M. Joubert (Eds.). Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. Vol.28, 31-36.
10. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
11. Hoffer, A. (1981). Geometry Is More Than Proof. Mathematics Teacher, 74(1), 11-18.
12. Papademetri-Kachrimani, (2012). Revisiting van Hiele. CA: University of California Press.
13. Rauscher, J-C., Kuzniak, A. (2005). On geometrical thinking of pre-service school teachers. Proceedings of CERME4. Sant Feliu de Guíxols, Spain, 738–747.
14. Романо, Д. (2009). О геометријском мишљењу. Настава математике. ЛИВ (2-3), 1-11.
15. Romano, D., Todić, V., Vinčić, M. (2010). Jedno utvrđivanje geometrijskih konpetencija studenata studijskog programa za obrazovanje učitelja. Istraživanje matematičkog obrazovanja. Vol. II (2010), Broj 3, 33 – 45.
16. Shaughnessy, J.M., & Burger, W.F. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher, 78,* 419-428.
17. Scher, D. (2002). Students' Conceptions of Geometry in a Dynamic Geometry Software Environment. Dissertation, Ph.D. in Mathematics Education, New York: New York University. Retrieved November 7, 2009.
18. Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometry thinking through activites that begin with play. Teaching children Mathematics, 5, 310–316.
19. Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insigth: A theory of Mathematics edusation. Orlando, FL: Academic Press.
20. Vlasnović, H., Cindrić, M. (2014). Razumjevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hileovoj teoriji. Izvorni znanstveni članak. 37 – 51.
21. Саво Ћебић (2005): Методички аспекти формирања геометријских појмова. Докторска дисертација. Београд: Учитељски факултет.
22. Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
23. Clements, D. H., & Battista, M. T. (1994). Computer Environments for Learning Geometry. Journal of Educational Computing Research. Vol. 10 (2), 173 – 197.

24. Clements, D. H., Samara, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. Teaching Children Mathematic, 6, 482 – 488.
25. Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., Samara, J. (1999). Young children's concepts of shape. Journal for Reseach in Mathematics Education. Vol. 30, No. 2. 192 – 212.

Snežana Savić, student
University of Belgrade Faculty of Teachet Education

VAN HIELE THEORY OF GEOMETRIC THINKING IN THE MATHEMATICAL TEACHING

Summary: Although the twentieth century was marked research in algebra, the emergence of the theory of geometric thinking encourages interest in geometric content. With increasing interest in geometric idea is important to research about the nature of geometrical reasoning and how it develops. This paper summarizes the theoretical framework for the study of geometrical reasoning van Hiele model of thinking in geometry. First, we give van Hiele theory of geometrical reasoning, levels of understanding of spatial relationships and geometric phase of learning content. Second, we present and analyze the interpretation of van Hiele theories. Then, we give a brief overview of research based on van Hiele theory. The paper uses the methods of theoretical analysis. Based on the researched literature we conclude that still need a lot of research on deep process of development and learning of geometrical reasoning.
Keywords*:* geometry, geometric thinking, van Hiele levels of geometric thinking, thinking of the geometric phase.

Рад је примљен 02. 03. 2017. године, а рецензиран 04. 04. 2017. године.