Марија Милинковић[2]
ОШ „Десанка Максимовић“ Београд

Прегледни рад
Методичка пракса број 1. 2017.
УДК: 372.47
стр. 31 - 42

ПСИХОЛОШКА КОМПЛЕКСНОСТ РАЗУМЕВАЊА МНОЖЕЊА И ДЕЉЕЊА

Rezime: У раду се указује на шири контекст бављења множењем и дељењем, односно на психолошку комплексност појмовног разумевања која се крије иза математичке једноставности. Циљ рада је детаљније упознавање са истраживањима која су рађена из области множења и дељења у последњих неколико деценија. Прво, аутор даје осврт на историјат термина множење и дељење. Затим је дат кратак преглед различитих репрезентација код множења и дељења као подлога за широк спектар теорија и анализу истакнуту у актуелним истраживањима и селекцију која је овде резимирана, односно теоријске перспективе Вергнауда, Шварца и Капута, Нешера, Фишбејна, Бела и Грира. Резултати релевантних истраживања показују да генерализација множења и дељења ван нивоа природних бројева захтева додатно реконструисање.

Кључне речи: настава математике, множење, дељење, психолошка комплексност, репрезентације.

[2] marija.milinkovic90@gmail.com

УВОД

Множење и дељење природних бројева може се сматрати релативно једноставним са математичке тачке гледишта. Истраживања приказана у овом поглављу откривају психолошку сложеност која се крије иза математичке једноставности. Шонфилд наводи: „Истраживачи у математичком образовању се све више окрећу ка студијама оријентисаним на процес у касним седамдесетим и осамдесетим годинама. Већи део истраживања оријентисаног на процес је био под утицајем психолошких истраживања која имају тенденцију да се фокусирају на "когнитивну архитектуру" као што су на пример студије о репрезентацијама." (Schoenfeld, 1992: 347).

Множење и дељење су концептуално комплексни чак и у домену природних бројева као и у погледу основног концептуалног разумевања. У првом делу овог рада, наведен је историјат термина множење и дељење. У другом делу, кратак преглед различитих репрезентација код множења и дељења служиће као подлога за широк спектар теорија и анализу истакнуту у истраживањима и селекцију која је овде резимирана. Разматрањем актуелних теоријских оквира, демонстрирана је сложеност ове теме из неколико различитих углова.

ИСТОРИЈАТ ТЕРМИНА МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ

Природан корак у развоју и подстицању нових знања у настави математике јесте дидактичко прилажење историјском развоју појмовног одређења. „У математичким наукама је старо и ново условљено једно другим, повезано чврстим генетичким везама." (Трифуновић, 1980: 48). Иако историја математичких термина није укључена у наставни план и програм, она је веома значајна, па чак и занимљива.

Реч „множење" потиче од латинске речи productum, producere, а користи се од 13. века. Дејић објашњава историјски развитак појма множења (Дејић, 2013: 80), он указује да је знак „x" за множење увео Енглез Виљем Оутред (W. Oughtred) у својој књизи *Кључ математике*. Данашњи знак„ · "увео је немачки математичар Региомонтан (Regiomontanus). Садашњи начин множења откривен је релативно касно. Тако у једном немачком рукопису из 1483. године среће се 5 начина множења међу којима је и онај који ми данас употребљавамо. Тај начин срећемо код Луке Пачолија (Paccioli). Трифуновић (Трифуновић, 1994: 23) пише о историјском развитку појма таблице множења: „Вук Караџић је у свом *Букварy* из 1827. године унео таблицу множења. Назвао је „Један пут један". Наиме, Вук је за називе народних песама узимао први стих. Према томе, како почетак таблице множења гласи „1 пут 1", то је Вук целу таблицу множења назвао „Један пут један"."

Реч „дељење“ први користи француски математичар Герберт (Gerbert). Термин divisio (од глагола divider - делити, расподелити) употребљиван је да се означи разлагање броја на делове. Дејић у својој књизи објашњава и историјски развој појма дељење (Дејић, 2013: 79) наводи да је термин количник први увео италијански математичар Фибоначи (Fibonachi) у *Књизи о абаку* 1202. године. Од модерних знакова за дељење, најстарија је разломачка црта. У општу употребу овај знак улази крајем 16. века заслугом Вијета (Viete). Двотачку (:) за дељење први пут користи енглески математичар Џонс (Jones). Тај знак је служио уместо разломачке црте. Употреба двотачке од стране Лајбница (Leibniz) коначно одомаћује овај симбол. Знаци D (од division) и M (од multiplication) за дељење и множење први пут се појављују у књизи немачког математичара Штифела (Stiffel) *Немачка аритметика*. Знак ÷ уводи Швајцарац Хенрих Ран (Rahn) 1659. године.

РАЗЛИЧИТЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ МНОЖЕЊА И ДЕЉЕЊА

У овом пасусу приказане су различите репрезентације множења и дељења са примерима, истакнута су два типа дељења, представљене су стратегије које ученици користе при решавању математичких проблема и наведена су истраживања која су вршена у последњих неколико година у области коришћења различитих репрезентација. Различите репрезентације у овом делу су дате као увод за теоријске анализе и разматрања којима се бавимо у овом раду.

„Реч „пута“ у говорном језику се често јавља као, на пример: „Био сам тамо три пута.“ и сл. Код множења, то што се понавља више пута је истобројност више скупова.“ (Дејић и Егерић, 2010: 113). Ситуације у којима постоји велики број група и објеката који имају исти број у свакој групи обично представљају најранији сусрет детета са захтевом за умножавањем. Пример 1: Свако од 3-оје деце има по 4 колача. Колико колача имају заједно? У оквиру ове концептуализације два броја играју скроз различите улоге. Број деце је множитељ/први чинилац јер се везује за број колача, а множеник/други чинилац има улогу да произведе одговор. „Термин множилац среће се код римског научника Боеција (Boethius), а множеник код енглеског математичара Сакробоска (Socrobosco).“ (Дејић, 2013: 80). Последица ове поделе је да се могу разликовати два типа дељења. Дељење резултата на број група, како би се пронашао број у свакој групи зове се партитивно дељење. Дељење резултата бројем у свакој групи како би се пронашао број група назива се квантитативно дељење, видети примере у табели 1. Примере различитих типова дељења проналазимо и у књизи *Методика наставе математике* (Дејић и Егерић, 2010).

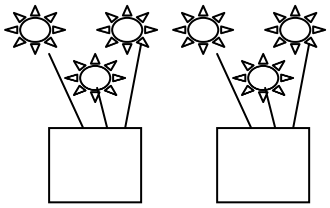
МНОЖЕЊЕ	ДЕЉЕЊЕ (Партитативно дељење, дељење по множитељу)	САДРЖАВАЊЕ (Квантитативно дељење, дељење по множенику)
Троје деце имају по 4 бомбоне. Колико бомбона имају заједно?	12 бомбона је подељено на једнаке делове између троје деце. Колико бомбона је добило свако дете?	Ако имаш 12 бомбона, колико деце може добити по 4 бомбоне?
Ана је ставила у 3 вазе по 5 лала. Колико укупно има лала?	15 лала је једнако распоређено у 3 вазе. Колико лала има у свакој вази?	Ана је добила 15 лала. Колико ће јој ваза бити потребно ако ће у сваку ставити по 5 ружа?

Табела 1. Примери различитих типова дељења

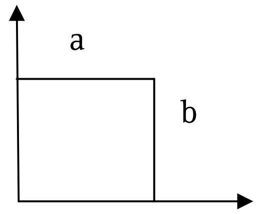
Са тачке гледишта терминологије пример 1 може бити изражен на овај начин: Ако постоје 4 колача по детету, колико колача има 3-оје деце? Уопштено, број у групи се множи бројем група како би се пронашао укупан број. У овој концептуализацији подразумева се непромењлив однос који повезује број деце и број колача.

Неке од најважнијих репрезентација када су у питању множење и дељење су: једнаке групе, Декартов производ и правоугаона област или модел површине, видети слике 1, 2 и 3. “Различите репрезентације су суштински важан део математичке науке. Када математичари говоре о различитим репрезентацијама уобичајно је да мисле на различите начине представљања истог проблема. Термин близак овом по смислу у коме се користи је "шематизовање". Оно се не односи само на представљање конкретног проблема на различите начине већ и размишљање у различитим парадигмама.“ (Милинковић, 2006: 28). Представљање множења као једнаких група дато је у примеру 1. „Други процес формирања појма множења је помоћу Декартовог производа два скупа чији су кардинални бројеви управо бројеви који се множе.“ (Дејић и Егерић, 2010: 114). Декартов производ пружа сасвим другачији контекст за множење природних бројева. Пример 2: Колико можемо саставити плесних парова од 3 дечака и 2 девојчице?

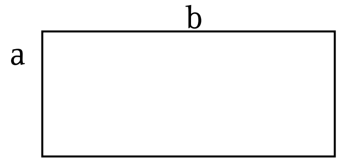
Наредна ситуација коју ћемо размотрити је правоугаона област. Дејић наводи како је између многих знакова за множење дуго употребљаван знак правоугаоника као симбол који значи да се његова површина добија множењем дужина страница. Све до 17. века, уместо производ, говорило се правоугаоник (Дејић, 2013: 80). Рецимо, стране правоугаоника су цели бројеви, 4 cm и 3 cm . У овом случају правоугаоник може да се подели на стране квадрата по 1 cm, тако да површина може бити израчуната бројем квадрата, тј. 12 cm^2. Као и код Картезијанских (Декартових) производа, два помножена броја играју једнаке улоге, тако да се они не разликују као множеник и множитељ, према томе, не постоје два различита типа дељења.



Слика 1. Репрезентација једнаких група



Слика 2. Репрезентација Декартовог производа



Слика 3. Репрезентација правоугаоне области

Истраживањем које је вршено код нас (Милинковић, 2016: 146) су испитиване склоности будућих учитеља ка коришћењу различитих репрезентација множења (скуповне репрезентације, једнаке групе, вишеструки низови, тачкасте мреже, Картезијански производ, бројевна права, правоугаоне репрезентације). Дошло се до закључка да студенти дају предност неким репрезентацијама, за њих је од примарне важности идеја једнакобројног груписања, која доводи до избора одређених репрезентација као што су скуповна или репрезентација вишеструких низова. На пример, они посматрају словни запис као нешто што захтева модел површине, док 69% студената сматра низ као најбољи избор за репрезентацију 3 · 4 = 4 · 3. У истраживању које су спровели Хари и Бармби (Harries and Barbmy, 2007: 33–46) наставници су подстицани да користе низ при увођењу ученика у дистибутивни закон множења, али и као помоћ при израчунавању производа. Они сматрају да је употреба низа ефикасно средство за разумевање множења. Хари и Бармби након свог истраживања предлажу да се настави рад у испитивању тога како деца разумеју репрезентације и како они дају смисао низу у контексту множења. Милинковић цитира Голдина и Штеинхолда који објашњавају да „ефикасно математичко мишљење укључује разумевање односа између различитих репрезентација истог појма као структурне сличности и разлике међу репрезентационим системима.“ (Милинковић, 2016: 144).

САВРЕМЕНЕ ТЕОРЕТСКЕ ПЕРСПЕКТИВЕ

Кратак преглед различитих репрезентација код множења и дељења служи као подлога за широк спектар теорија и анализу истакнуту у актуелним истраживањима и селекцију која је овде резимирана.

Грир (Greer, 1992: 279) наводи Вергнауда (Vergnaud) који поставља множење и дељење у оквиру ширег контекста онога што он назива ,,концептуално поље мултипликативних структура", које дефинише као постојање свих ситуација које могу бити анализиране као проблем једноставне и вишеструке пропорције и за које је обично потребно множење или дељење. Идентификоване су три главне класе проблема са мултипликативном структуром:

- сличност мера,
- производ мера,
- вишеструке пропорције.

Сличност мера покрива све ситуације у којима постоји директна пропорција, чије тумачење показује блискост везе између множења/дељења и пропорционалног размишљања. Примери одговарајућег шематског приказа дати су у табелама 2, 3 и 4:

Пример 3 за множење: Свако од 3-оје деце има по 4 поморанџе. Колико поморанџи имају сви заједно?

ДЕТЕ	ПОМОРАНЏЕ
1	4
3	?

Табела 2. Сличност мера

Пример 4 за дељење множитељем: Чамац се креће брзином од 18 m за 3 s. Колика је његова просечна брзина у m / s?

s	m
1	?
3	18

Табела 3. Сличност мера

Пример 5 за дељење множеником: 1 инч је око 2,54 cm. Колико је у инчима 7,84 cm?

inc	Cm
1	2,54
?	7,84

Табела 4. Сличност мера

“Друга главна карактеристика по Вергнауд-у, назива се производ мера. У Вергнауд-овој шеми ова категорија подводи се под Декартов производ и правоугаони простор.“ (Greer, 1992: 283).

Пример 6 за множење: Која је површина правоугаоника дужине 3,3 m и ширине 4,2 m?

Пример 7 за дељење: Грејач користи 3,3 kW/h. Колико дуго сати може да се користи 13,9 kW електричне енергије? У примеру 7 не постоји јасна разлика између две врсте дељења, као што је случај са мерама сличности. У наставку је пример вишеструке пропорције. Пример 8: Породица сачињена од 4 члана жели да проведе 13 дана у одмаралишту. Трошкови су дневно по особи 35 $. Колики ће бити укупан трошак одмора? Међутим, овај проблем може да се растави на једноставније проблеме који спадају у класе већ дефинисаних на следећи начин:

4 особе · 13 дана = 52 дана по особи

35$ по особи дневно · 52 дана по особи = 1820 $

Овакви проблеми нису укључени у посебну анализу у овом поглављу. Они су важни, посебно у физици, где формуле често захтевају вишеструке пропорције.

Фокусирањем на математику као модел активности Грир даље (Greer, 1992: 284) скреће пажњу на Шварцов и Капутов (Schwartz and Kaput) значај веза између бројева и њихових ознака. Бројеви настају:

1. Бројањем или мерењем.
2. Кроз примену аритметичких операција претходних бројева.

Бројеви добијени применом математичких операција са другим бројевима представљају посебно значајну врсту. Да бисмо користили Шварцов пример, Грир (Greer, 1992: 284) разматра гомилу зрна кафе са следећим пратећим бројевима.

Тежина кафе	Трошкови кафе	Цена кафе
5 kg	$ 15	$ 3 по kg

Трећи број се разликује од прва два. Док су тежина и цена својства целе гомиле, цена по килограму је власништво било ког дела гомиле. Суштинска карактеристика оваквих бројева је да бројчано изражава константан мулти-пликативни однос између два друга броја (као што су на пример константна брзина, убрзање, маса, густина и они су веома важни у физици). Треба додати да постоји још начина на који се бројеви моги изводити, превасходно путем сложених интеракција унутар практичног рада са људима.

Нешер је анализирао пропорционалну структуру три класе ситуација (цитирано у Greer, 1992: 285):

1. Правило пресликавања.
2. Декартов производ.
3. Поређење у множењу, које је споменуто у оквиру овог поглавља није раздвојено као посебна класа ситуације ни од стране Вергнауда, а илустровано је примером 9: Милица има 3 кликера. Ана има 4 пута више кликера од Милице. Колико кликера има Ана? Поређење се чини неприродним, на основу класификације која је дата, па се овај проблем може третирати као проблем стопе. „Нешеров проблем стопе као посебне класе ситуације може се повезати са једноставношћу представљања поређења у множењу на хебрејском језику у којем постоји израз P, где P · 5 означава количински 5 пута вредности израза“. (Greer, 1992: 285). Израелску децу узраста 10–12 година су питали да:

а) Напишу пример множења 3·4.

б) Напишу како би објаснили другом детету како да разликују множење од сабирања.

Најчешћи одговори на питање под а) су били поређење у множењу (41%) и једнаке групе (54%). За задатак под б) одговори су се углавном односили на карактеристике поређења у множењу (53%) или карактеристике једнаке групе (14%). Формулација P се представља од стране учитеља у Израелу у раној доби детета ради формирања дечјег разумевања појма множења. Грир даље поставља питање о културолошким разликама, које нису детаљно истражене и није им посвећена пажња приликом истраживања о множењу и дељењу.

Теорија коју су заговарали Фишбејн, Дери, Нело и Марино (Fischbein, Deri, Nello, and Marino) је била следећа: „Свака аритметичка операција бива повезана са интуитивним моделом. Идентификација операције да би се решио проблем са два нумеричка податка посредно је повезана са моделом.“ (Greer, 1992: 286). Предложено је да је примитивни модел множења уствари сабирање које се понавља више пута. Према Дејићу (Дејић и Егерић, 2010: 113) „[...] процес формирања појма множења може започети здруживањем једнакобројних скупова и увођењем појмова пута и производ.“ У ситуацији као што је: 3-оје деце поседује 4 поморанџе, ситуација се може представити као 4 поморанџе + 4 поморанџе + 4 поморанџе и одговор се може добити сабирањем које се понавља. Ова представа може се генерализовати и на ситуацију да 3-оје деце има 4.2 литре сока, где се резултат представља сабирањем које се понавља као 4.2 литре + 4.2 литре + 4.2 литре. Да би се ситуација могла представити овим моделом кључна чињеница је да множитељ мора бити цео број, док не постоје ограничења за множеник. Такође, модел множења показује да је резултат увек већи од множеника. Међутим, разлика множитељ/множеник применљива је и на друге класе ситуација и у општем случају множитељ и множеник могу бити цео број, разломак или децимални број. У примерима 10 и 11 дат је приказ где оба примера укључују множење 16 и 0.85. Резултати неколико експеримената показали су „ефекат множитеља“у којима је приказана тешкоћа идентификовања операције множења у зависности од тога да ли је множитељ цео број, децимални број већи од 1 или децимални број мањи од 1. Када је множитељ мањи од 1, постоји додатна отежаност јер је резултат мањи од множеника, што је некомпатибилно са моделом сабирања које се понавља:

Пример 10: Ракета лети брзином 16 миља у секунди. Колики пут ће прећи за 0.85 секунди?

Пример 11: Ракета лети брзином 0.85 миља у секунди. Колики пут ће прећи за 16 секунди?

Фишбејн и остали су представили два модела, партитивно и квантитативно дељење. Партитивно и квантитативно дељење су већ били раније дефинисани у ситуацији једнаких група. Према Гриру (Greer, 1992: 287): „Фишбејн предлаже да је партиција оригинални интуитивни модел за дељење и да се квотација стиче касније кроз инструкције." У студијама чија је тема била да се састави текстуални проблем који одговара дељењу 12 : 3, већина испитаника је користила партиционо дељење, што је показало доминантност партиционог дељења над квотационим дељењем.

Бел, Грир и остали истраживачи (Bell, Greer et al.) су привукли пажњу са проучавањем нумеричко/рачунљивих аспеката у ситуацијама у којима се сматра да множење прави резултат већим, а да дељење прави резултат мањим. Ова погрешна схватања постоје у текстуалним задацима и њихова распрострањеност је била приказана код учитеља и сарадника у настави. Начин на који ученици размишљају је илустрован следећим примером једног учитеља који је дао проблем дељења 15/5, у виду задатака да 15 пријатеља деле 5 килограма кекса. Ученик је аутоматски написао 15/5, наводећи да је преформулисао питање тако да би већи број дошао први (Greer, 1992: 287). Текстуални проблеми множења и дељења у збиркама ретко дају контрапримере за погрешно схватање да множење увек увећава резултат, а дељење смањује и да се увек дели већи број са мањим. Грир (Greer, 1992: 288) приказује следећа два примера Аф Екенстама и Грегера (Af Ekenstam and Greger) који су били постављени особама узраста 12 и 13 година:

Пример 12: Сир тежи 5kg. 1 kg кошта 28$. Пронађи цену једног сира. Коју операцију бисте применили?

28 / 5 ; 5 • 28 ; 5 + 28 ; 28 + 28 + 28 + 28 + 28 ;

Пример 13: Сир тежи 0.923 kg. 1 kg кошта 27.50$. Пронађи цену једног сира. Коју операцију бисте применили?

27.50 + 0.923 ; 27.50 / 0.923 ; 0.923 • 27.50 ; 27.50 – 0.923 ;

Резултат је показао да су ученици већином за решење првог проблема бирали множење, док су за решење другог проблема бирали дељење, иако су их особе које су их испитивале указивале на сличност између ова два проблема. Јасно је да је избор дељења за други проблем заснован на чињеници да би одговор био мањи од 27.50, укомбиновано са уверењем да множење увек увећава резултат, а дељење смањује. Овај феномен промене операција чак и кад је представљен исти проблем, али са различитим бројевима, Грир назива „неодрживост код операција множења и дељења“ и дубље га је истражио у оквиру разлике коришћења множења и дељења кад бројеви не морају бити само цели бројеви.

Проблеми деце су приказани кроз реорганизацију концептуализације множења и дељења ван домена целих бројева, што се показало низом експериментални доказа који се могу сажети на следећи начин:

Постоји позната колективна заблуда у смислу да се множењем увећава број, а дељењем смањује, тако што се већи број дели увек мањим. Заблуде су забележене и код оних који уче за професора и код самих професора.

Пронађен је јасан образац који је назван „ефектом множитеља“, за ситуације у којима множеник и множитељ могу бити различити. Да би множење било интуитивно виђено као прикладна операција, кључни фактор је да множитељ мора бити цео број.

Било ко, ко ради на себи или је предавач мора да има на уму да треба помоћи деци да изграде концепте који су се културолошки вековима развијали. Концептуалне препреке са којима се суочавају деца имају историјске одјеке. Грир (Greer, 1992: 291) наводи пример Пачолија (Paccioli), италијанског математичара из 15. века који је у великој мери осећао срамоту да употреби термин множење у смислу разломака, где је производ мањи од множеника, цитирајући Библију: ,,Будите плодни и множите се,, како би доказао да множење значи повећање. Природно је да множење и дељење буде укључени у везу са целим бројевима. Исти правац мора да буде усвојен и у настави младих.

ЗАКЉУЧАК

Значајан низ емпиријских истраживања и теоријских анализа прегледан је у овом раду. Као што су досадашња истраживања показала, множење и дељење су били анализирани из више перспектива. Приказани су резултати различитих аутора из теорије и праксе учења и наставе математике у области множења и дељења.

Централна тема овог поглавља, генерализација концепта множења и дељења са целим бројевима, обрађена је у контексту са до сада изнесеним теоријским перспективама – Вергнауда, Шварца и Капута, Нешера, Фишбејна, Бела и Грира. Заједничко за све приступе је да генерализација множења и дељења ван нивоа целих бројева захтева додатно реконструисање. У нашој земљи до сада нису вршена истраживања која би потврдила или оповргла резултате до којих су дошли ови истраживачи. Различите репрезентације су сумиране са примерима множења и дељења, истакнута су два типа дељења, представљене су стратегије које ученици користе при решавању математичких проблема и наведена су истраживања која су вршена у последњих неколико година у области коришћења различитих репрезентација. Главни приоритет требало би да буде допуна утврђених експеримената, обимнија систематизација свих ситуација у којима је одговарајуће извршити множење и дељење. Нови, важан допринос била би систематска анализа уџбеника који се баве темом множења и дељења. Когнитивни научници интензивно су допринели у последњој деценији проучавању проблема сабирања и одузимања. Надамо се да ће већу пажњу посветити сложеној области, односно проблему множења и дељења.

Литература

1. Дејић, М., Егерић, М. (2010). *Методика наставе математике.* Јагодина: Учитељски факултет у Јагодини.
2. Дејић, М. (2013). *Број, мера, безмерје*. Београд: Учитељски факултет.
3. Дејић, М., Михајловић, А. (2015). Улога и значај историје математике у настави. *Годишњак Учитељског факултета у Врању*, VI, 67–82.
4. Марјановић, М., Мићић В. (1994). Множење у скупу Q0+. *Настава Математике*, 204, 12–19.
5. Марјановић , М. (1997). Схематско учење таблица сабирања и множења – штапићи као дидактички материјал. *Настава математике,* XLII (3–4), 1–20. Београд: Друштво математичара Србије.
6. Марковић, И. (2014). Стратегија множења вишецифрених бројева – теорија и пракса. *Истраживање математичког образовања*, VI, (10), 37–43.
7. Милинковић, Ј. (2006). Репрезентације у настави вероватноће и статистике. *Иновације у настави,* 29 (2), 26–37. Београд: Учитељски факултет.
8. Милинковић, Ј. (2006). *Огледи о учењу и настави математике.* Београд: Учитељски факултет.
9. Трифуновић, Д. (1980). Неке напомене о историји математике у настави. *Зборник Института за педагошка истраживања*, 13, 47–52. Београд: Институт за педагошка истраживања.
10. Трифуновић, Д. (1994). Таблица множења. *Настава математике,* XL (1–2), 20–25. Београд: Друштво математичара Србије.
11. Barmby, P. and Milinkovic, J. (2011). Pre-service teachers' use of visual representations of multiplication. *Developing Mathematical Thinking, The 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 2, 105–112. Ankara, Turkey.
12. Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (276–293). New York: Macmillan Publishing Company.

13. Harries, A. and Barmby, P. W. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in mathematics education,* 9 (1), 33–46. Durham University.
14. Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (334–370). New York: Macmillan Publishing Company.
15. Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics.* England: Penguin Books.

Marija Milinkovic
Primary school "Desanka Maksimovic" Belgrade

PSYCHOLOGICAL COMPLEXITY OF UNDERSTANDING OF MULTIPLICATION AND DIVISION

Abstract: This paper indicates the wider context of dealing with multiplication and division, that is the psychological complexity of the conceptual understanding behind the mathematical simplicity. The goal of this paper is to learn more about research that has been done in the field of multiplication and division in the last few decades. Firstly, the author provides an overview of the history of the terms multiplication and division. Then, a summary of different representations in multiplication and division is given as the basis for a wide range of theories and the analysis that is highlighted in the current studies and the selection summarized here, that is theoretical perspectives of Vergnaud, Schwartz and Kaput, Nesher, Fischbein, Bell and Greer. The results of relevant studies show that the generalization of multiplication and division beyond the levels of natural numbers requires additional reconstruction.
Key words: teaching Mathematics, multiplication, division, psychological complexity, representations.

Рад је примљен 16. 11. 2016. године, а рецензиран 03. 05. 2017. године.